

Varianz und Standardabweichung einer Binomialverteilung

Varianz und Standardabweichung einer Binomialverteilung

Für Varianz und Standardabweichung einer Binomialverteilung mit der Zufallsgröße X : Anzahl der Erfolge gelten: $V(X) = n \cdot p \cdot q$ und $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Beweis:

1)	$V(X) = \sum_{i=1}^n (a_i - E(X))^2 \cdot P(X = a_i)$	Definition der Varianz
2)	$V(X) = \sum_{i=1}^n (\quad) \cdot P(X = a_i)$	2. binomische Formel
3)	$V(X) = \sum_{i=1}^n (a_i^2 - 2a_i np + (np)^2) \cdot P(X = a_i)$	$E(X)$ (bei Binomialverteilungen)
4)	$V(X) = \sum_{i=1}^n \quad \cdot \quad - \quad \cdot P(X = a_i) + (np)^2 \cdot \quad$	Klammer ausmultiplizieren
5)	$V(X) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot P(X = a_i) - \sum_{i=1}^n 2a_i np \cdot P(X = a_i) + \sum_{i=1}^n (np)^2 \cdot P(X = a_i)$	Summen aufspalten
6)	$V(X) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot P(X = a_i) - \quad \sum_{i=1}^n \quad + \quad \sum_{i=1}^n \quad$	Ausklammern
7)	$V(X) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot P(X = a_i) - 2np \cdot np + (np)^2 \cdot \sum_{i=1}^n P(X = a_i)$	
8)	$V(X) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot P(X = a_i) - 2np \cdot np + (np)^2 \cdot 1$	
9)	$V(X) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot P(X = a_i) - \quad + n^2 p^2$	Termumformung
10)	$V(X) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot P(X = a_i) \quad$	Zusammenfassen
11)	$V(X) = n^2 \cdot p^2 - n \cdot p^2 + np - n^2 p^2$	Hilfssatz (siehe unten) mit $a_i = k$
12)	$V(X) = \quad$	Zusammenfassen
13)	$V(X) = \quad$	Ausklammern
14)	$V(X) = npq$	q.e.d.

Hilfssatz

$$\sum_{k=1}^n k^2 \cdot P(X = k) = n^2 \cdot p^2 - n \cdot p^2 + n \cdot p$$

Beweis:

1)	$\sum_{k=1}^n k^2 \cdot P(X = k)$	
2)	$= \sum_{k=1}^n k^2 \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	
3)	$= \sum_{k=1}^n k^2 \cdot \quad p^k q^{n-k}$	$\binom{n}{k}$ auflösen
4)	$= n \cdot (n-1) \cdot \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{(\quad)!}{(\quad)! \cdot (\quad)!} p^k q^{n-k}$	Ausklammern
5)	$= n \cdot (n-1) \cdot \left[\sum_{k=1}^n \frac{(n-2)!(1+(\quad-1))}{(n-k)! \cdot (k-1)!} p^k q^{n-k} \right]$	Zahl mal Bruch
6)	$= n \cdot (n-1) \cdot \left[\sum_{k=1}^n \frac{\quad}{(n-k)! \cdot (k-1)!} p^k q^{n-k} \right]$	Distributivgesetz
7)	$= n \cdot (n-1) \cdot \left[\sum_{k=1}^n \frac{(n-2)!(k-1)}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \cdot p^k q^{n-k} \quad \sum_{k=1}^n \frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \cdot p^k q^{n-k} \right]$	Summen aufspalten
8)	$= n \cdot (n-1) \cdot \left[\sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot (k-2)!} \cdot p^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^n \frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \cdot p^k q^{n-k} \right]$	
9)	$= n \cdot (n-1) \cdot \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot (k-2)!} \cdot p^k q^{n-k} + n \cdot (n-1) \sum_{k=1}^n \frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \cdot p^k q^{n-k}$	Distributivgesetz []
10)	$= n \cdot (n-1) \cdot \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot (k-2)!} \cdot p^k q^{n-k} + n \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\quad}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \cdot p^k q^{n-k}$	Distributivgesetz
11)	$= n(n-1) \cdot \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(n-2-(k-2))! \cdot (k-2)!} \cdot p^{k-2} q^{n-k} + n \cdot \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \cdot p^{k-1} q^{n-k}$	Ausklammern
12)	$= n \cdot (n-1) \cdot p^2 \cdot \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} \cdot p^{k-2} q^{n-k} + n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} q^{n-k}$	$\binom{n}{k}$ anwenden
13)	$= n \cdot (n-1) \cdot p^2 \left[\binom{n-2}{0} \cdot p^2 q^{n-2} + \binom{n-2}{1} \cdot p^3 q^{n-3} + \dots + \binom{n-2}{n-2} \cdot p^n q^0 \right] + n \cdot p \cdot \left[\binom{n-1}{0} \cdot p^1 q^{n-1} + \binom{n-1}{1} \cdot p^2 q^{n-2} + \dots + \binom{n-1}{n-1} \cdot p^n q^0 \right]$	Summen ausschreiben
14)	$= n \cdot (n-1) \cdot p^2 \cdot (\quad)^{n-2} + np \cdot (p+q) \quad$	Binomischer Lehrsatz (Pascalsches Dreieck)
15)	$= n \cdot (n-1) \cdot p^2 \cdot (1)^{n-2} + np \cdot (1)^{n-1}$	
16)	$= n \cdot (n-1) \cdot p^2 + np$	
17)	$= \quad + np$	q.e.d. Distributivgesetz