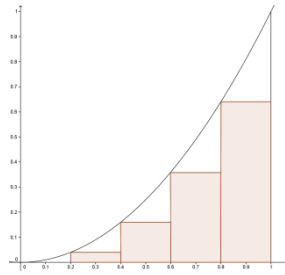


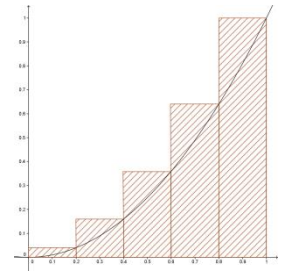
Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse

- ❶ Es soll der Flächeninhalt $A_{[0;1]}$ zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ und der x-Achse über dem Intervall $[0;1]$ bestimmt werden.



Dazu wird das Intervall $[0;1]$ in n gleich große Teilstücke der Länge $\frac{1}{n}$ aufgeteilt und von diesen jeweils die Unter- und Obersumme berechnet.

Zur Erinnerung: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$



Untersumme U_n		Obersumme O_n	
$U_n = \frac{1}{n} \cdot f(0) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots +$		$O_n = \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n} \cdot$	
$= \frac{1}{n} \cdot \left(f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right)$		$= \frac{1}{n} \cdot \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f(1) \right)$	
$= \frac{1}{n} \cdot \left(0 + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \right)$		$= \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2} \right)$	
$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2)$		$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2)$	
$= \frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} \right)$	$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{n^2} \right)$	$= \frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \right)$	$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{n^2} \right)$
$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{(n-1) \cdot (2n-1)}{n^2} \right)$	$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2} \right)$	$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{(n+1) \cdot (2n+1)}{n^2} \right)$	$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \right)$

Für den Flächeninhalt $A_{[0;1]}$ gilt: $U_n \leq A_{[0;1]} \leq O_n$

Je $n \rightarrow \infty$, desto nähern sich U_n und O_n dem tatsächlichen Flächeninhalt $A_{[0;1]}$ an.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2} \right) \right) = \frac{1}{6} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2} \right) = \frac{1}{6} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{n^2} - \frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{n^2} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{n^2} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = \frac{1}{6} \cdot (2 - 0 + 0) = \frac{1}{3} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} O_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \right) \right) = \frac{1}{6} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \right) = \frac{1}{6} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{n^2} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{n^2} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = \frac{1}{6} \cdot (2 + 0 + 0) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt $A_{[0;1]}$ gilt also:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n \leq A_{[0;1]} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} O_n \Rightarrow A_{[0;1]} = \frac{1}{3}$$

- ❷ Wie groß ist der Flächeninhalt $A_{[0;b]}$ zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ und der x-Achse im Intervall $[0;b]$?

Für den Flächeninhalt $A_{[0;b]}$ über $[0;b]$ unter dem Graphen von $f(x)=x^2$ gilt:

$$A_{[0;b]} = \frac{1}{3} b^3$$

- ❸ Wie groß ist der Flächeninhalt $A_{[a;b]}$ zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ und der x-Achse in $[a;b]$?

Für den Flächeninhalt $A_{[a;b]}$ über $[a;b]$ unter dem Graphen von $f(x)=x^2$ gilt:

$$A_{[a;b]} = \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{3} a^3$$

