

Die eulersche Zahl als Grenzwert der Folge (a_n) mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Hilfssatz 1: Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Hilfssatz 2: :

$(1+x)^n > 1+nx$ für $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n > 1$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ (Bernoulli-Ungleichung)

1.1 (a_n) ist monoton steigend

Zur Erinnerung: (a_n) ist streng monoton steigend $\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \textcircled{0} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ \textcircled{1} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} && \text{Erweitern mit } \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ \textcircled{2} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \\ \textcircled{3} &= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} && \text{(in Zähler und Nenner)} \\ \textcircled{4} &= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ \textcircled{5} &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) && \text{Potenzgesetze} \\ \textcircled{6} &= \left(\frac{(n+2) \cdot n}{(n+1) \cdot (n+1)}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ \textcircled{7} &= \left(\frac{n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) && \text{Quadratische Ergänzung} \\ \textcircled{8} &= \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ \textcircled{9} &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ \textcircled{10} &> \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) && \text{Bernoulli-Ungleichung} \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)(n+2)}{(n+1)^2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+2}{n} > 1 \\ &\Rightarrow (a_n) \text{ ist } \underline{\text{streng monoton steigend}} \end{aligned}$$

1.2 (a_n) ist beschränkt

Betrachte zunächst die Folge (b_n) mit $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Zeige analog zu 1.1: (b_n) ist streng monoton fallend, d.h. $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$

1.3 (a_n) ist konvergent

Weil $\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1$ folgt, dass $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n$
also: $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da (b_n) streng monoton fallend und (a_n) streng monoton steigend, muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten: $a_n < b_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 \Rightarrow (a_n)$ ist beschränkt.

Nach Hilfssatz 1 ist die Folge (a_n) mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ damit konvergent. q.e.d

Der Grenzwert der Folge (a_n) heißt „eulersche Zahl“ und wird mit e abgekürzt:

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2. Die eulersche Zahl bei Leonhard Euler (1707-1783)

„Von der Darstellung der Exponentialgrößen und der Logarithmen durch Reihen.“

$$\S 122. [...] a = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Verwandelt man diese Brüche in Decimalbrüche und addiert sie sodann, so erhält man für a folgenden Wert: $a = 2,71828182845904523536028$, wo auch noch die letzte Ziffer genau ist. Die auf Grund dieser Basis berechneten Logarithmen werden gewöhnlich natürliche [...] Logarithmen genannt [...]. Wir werden nun in der Folge der Kürze wegen für diese Zahl 2,718281828459... stets den Buchstaben e gebrauchen, so dass also e die Basis der natürlichen [...] Logarithmen bedeutet, [...], oder es soll e stets die Summe der unendlichen Reihe $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$ bezeichnen.“

[Leonhard Euler: Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Erster Teil. Ins Deutsche übertragen von H. Maser, Berlin (Springer) 1885, S. 91 (Original Introductio in Analysin Infinitorum, Lausanne (Bousquet) 1748)]

3. Die eulersche Zahl ist irrational (Indirekter Beweis durch Widerspruch)

① Abkürzende Schreibweise: $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ (Lies: „n Fakultät“)

① Nach Euler: $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \Rightarrow \textcircled{2} \underline{\quad} < e < 3$

② Annahme: e sei rational, also $e = \frac{p}{q}$ mit $\frac{p}{q}$ in Grundform (d.h. voll gekürzt) $p, q \in \mathbb{N}$

Weil $\underline{\quad} < e < 3$ ist, gilt $e \in \mathbb{N}$, also $\textcircled{3} q > 1$.

③ Multiplikation von e mit $q!$ ergibt: $e \cdot q! = \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \dots + \frac{q!}{q!} + \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \dots$

④ $e \cdot q! = \frac{p}{q} \cdot q! = p \cdot (q-1)! \in \mathbb{N}$, weil jeder Faktor der Multiplikation $\in \mathbb{N}$ ist.

⑤ $\frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \dots + \frac{q!}{q!} = q! + \left[\frac{q!}{2} + \frac{q!}{6} + \dots + \frac{q!}{q}\right] = q! + [q \cdot (q-1) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2] + [q \cdot (q-1) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3] + \dots + [q] + [1] = \underline{\quad} \in \mathbb{N}$

⑥ $\frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \dots = \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1) \cdot (q+2)} + \frac{1}{(q+1) \cdot (q+2) \cdot (q+3)} + \dots < \frac{1}{q+1} < \frac{1}{q} < 1$
weil $\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1) \cdot (q+2)} + \frac{1}{(q+1) \cdot (q+2) \cdot (q+3)} + \dots \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{60} + \dots < 1$

⑦ Dies führt zum Widerspruch zu $\underline{\quad} < e < 3$, also ist e irrational. q.e.d

[Siehe dazu auch: <https://www.youtube.com/watch?v=duFVzBr59gA>]