

Die Ableitung von Exponentialfunktionen

Sei $f(x) = a^x$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) eine beliebige Exponentialfunktion.

Frage 1: **Gesucht: $f'(x_0)$**

❶ Bestimme $f'(x_0)$ mit der h-Methode

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x_0} \cdot a^h - a^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(a^{x_0} \cdot \frac{a^h - 1}{h} \right) \\ &= a^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \text{_____} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \end{aligned}$$

also: $f'(x_0)$ existiert, wenn _____ existiert!

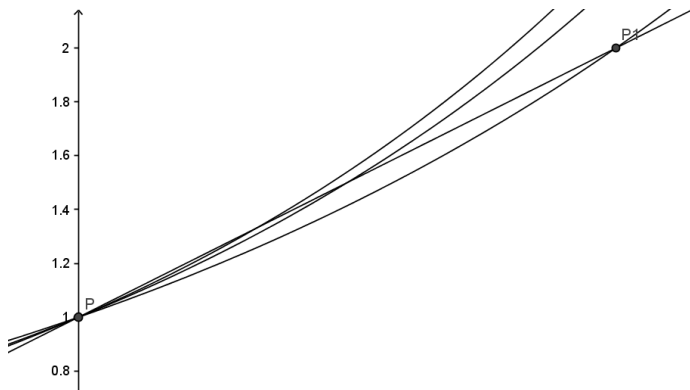
Besonders einfach zu untersuchen ist dies für $x_0 = 0$.

❷ Warum macht eine genauere Untersuchung von $x_0 = 0$ noch Sinn?

Frage 2: **Gesucht ist eine Basis a von $f(x) = a^x$, so dass $f'(0) = 1$**

❸ Was bedeutet $f'(0) = 1$ geometrisch?

- (1) Allgemeine Geradengleichung einer Tangenten g an f: $g(x) = \text{_____}$
- (2) g hat die Steigung m = _____, weil $f'(0) = 1$
- (3) g hat den y-Achsenabschnitt b = _____, weil $g(0) = 1$
- (4) also: $g(x) = 1 \cdot \text{_____}$, ist die Gleichung der _____



Versuch einer Annäherung an $f(x) = a^x$, so dass $f'(0) = 1$ durch $x \rightarrow 0$:

1. Annäherung an f mit einem Graphen durch P und $P_1(1|y)$ auf g:

$$P_1(1|g(1)) = P_1(1|\text{_____}) \Rightarrow f(1) = a^1 = 2 \Rightarrow a = \text{_____} \Rightarrow f_1(x) = \text{_____}^x$$

2. Annäherung an f mit einem Graphen durch P und $P_2(\frac{1}{2}|\frac{3}{2})$ auf g:

$$P_2(\frac{1}{2}|g(\frac{1}{2})) = P_2(\frac{1}{2}|\frac{3}{2}) \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = \text{_____} \Rightarrow a = \frac{9}{4} \Rightarrow f_2(x) = (\frac{9}{4})^x$$

3. Annäherung an f mit einem Graphen durch P und $P_3(\frac{1}{3}|\frac{4}{3})$ auf g:

$$P_3(\frac{1}{3}|g(\frac{1}{3})) = P_3(\frac{1}{3}|\frac{4}{3}) \Rightarrow f(\frac{1}{3}) = a^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = (\frac{4}{3})^3 = \frac{64}{27} \Rightarrow f_3(x) = (\frac{64}{27})^x$$

...

n. Annäherung an f mit einem Graphen durch P und $P_n(\frac{1}{n}|\frac{n+1}{n})$ auf g:

$$\begin{aligned} P_n(\frac{1}{n}|g(\frac{1}{n})) &= P_n(\frac{1}{n}|\frac{n+1}{n}) \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = a^{\frac{1}{n}} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow a = (1 + \frac{1}{n})^n \Rightarrow f_n(x) = \left((1 + \frac{1}{n})^n \right)^x \end{aligned}$$

Für $x = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ (also $n \rightarrow \infty$) kommt man immer näher an $P(0|1)$

$\Rightarrow$ die gesuchte Basis a der Funktion $f(x) = a^x$ für die gilt $f'(0) = 1$

$$\text{ist also } a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

Frage 3: **Was wissen wir damit über die Ableitung von $f(x) = e^x$?**

Von ❶ wissen wir: $f'(x_0) = f(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$

Für $x_0 = 0$ gilt damit:

$$1 = f'(0) = f(0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \Rightarrow \text{_____} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

$$\Rightarrow \text{allgemein für beliebiges } x_0: f'(x_0) = \text{_____} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = f(x_0) \cdot 1$$

Die natürliche Exponentialfunktion

Die natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ (mit $e = \text{_____}$) hat die Ableitungsfunktion $f'(x) = \text{_____}$. Eine Stammfunktion von f ist $F(x) = \text{_____}$.

Mathematikerwitz:

Treffen sich zwei Funktionen in einer dunklen Gasse. Sagt die eine: „Geh mir aus dem Weg oder ich differenziere dich, bis Du eine Null bist!“ Sagt die andere: „Ätsch, ich bin _____!“