

Wie der Funktionsbegriff in die Schule kam

Martin Mattheis

Der Funktionsbegriff und das funktionale Denken sind aus der heutigen Schulmathematik nicht wegzudenken. Damit erhebt sich neben der Frage, wann und wie unser heutiger Funktionsbegriff entstanden ist, noch die ebenso spannende, wann und wie er in die Lehrpläne Eingang gefunden hat. Der folgende Beitrag wird beides überblicksartig verdeutlichen.

1 Funktionsbegriff und funktionales Denken

Funktionales Denken und der Begriff einer Funktion sind selbstverständlicher Bestandteil der heutigen (Schul-)Mathematik. Bei der 2003 bzw. 2012 in den Bildungsstandards für die Sekundarstufen I und II erfolgten Neueinteilung der Schulmathematik wurde – anstatt der bisher üblichen, fachsystematisch begründeten Einteilung in Geometrie und Algebra (bzw. in Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik) – eine Einteilung in Leitideen gewählt. Die Leitideen sollen dazu dienen, ein „Verständnis von grundlegenden mathematischen Konzepten zu erreichen“.¹ Wenn man sich vor Augen führt, in wie vielen Studienfächern – nicht nur aus dem mathematisch-naturwissenschaftlich-technischen Bereich – Funktionen und funktionales Denken eine Rolle spielen, so erscheint die Bedeutung, die diesem Konzept in den Bildungsstandards eingeräumt wird, mehr als gerechtfertigt.

Eine dieser Leitideen ist der *Funktionale Zusammenhang*. In den Bildungsstandards der Sekundarstufe II wird der funktionale Zusammenhang dabei allerdings

1. Bildungsstandards 2003, S. 13.

etwas einseitig auf den Funktionsbegriff fokussiert². Vollrath beschrieb 1989 *funktionales Denken* folgendermaßen: „Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist.“³ Diese Formulierung taugt zwar nicht als mathematische Definition, lenkt aber den Blick darauf, dass der mathematische Funktionsbegriff eine echte Teilmenge des funktionalen Denkens darstellt, was Mathematik-Lehrpersonen bei der Konzeption ihres Unterrichts berücksichtigen sollten.

Die Forderung nach einer Verstärkung des funktionalen Denkens umfasst weit mehr als nur die Untersuchung verschiedener Funktionen oder Funktionsklassen als mathematische Objekte. Funktionales Denken beinhaltet verschiedene Aspekte, wie z. B. den **Zuordnungsaspekt**, bei dem davon ausgegangen wird, dass einer Ausgangsgröße eine Zielgröße zugeordnet wird. Dieser Aspekt kann, muss aber nicht, anhand einer Funktion verstanden werden. So wird bei der Fläche eines Quadrates auch ohne die Verwendung einer Funktion der Ausgangsgröße *Seitenlänge* die Zielgröße *Flächeninhalt* zugeordnet. Schreibweisen, die den Zuordnungsaspekt hervorheben, sind $x \mapsto y$ oder die Verwendung einer Wertetabelle. Ein zweiter Aspekt des funktionalen Denkens ist der Aspekt der Änderung (**Kovariationsaspekt**): Wenn sich eine Größe ändert, dann ändert sich auch eine andere davon abhängige Größe. Bei der Flächeninhaltsformel eines Quadrates $A = a^2$ ist der Kovariationsaspekt ebenfalls ganz ohne eine Funktion enthalten: Ändert man die Seitenlänge, so ändert sich auch der Flächeninhalt. Eine passende Schreibweise zur Hervorhebung des Kovariationsaspektes wäre $y = f(x)$. Ein dritter Aspekt des funktionalen Denkens ist der Blick auf die **Funktion als Ganzes**, also aller Wertepaare, die eine Bedingung wie z. B. eine Funktionsgleichung erfüllen. Dieser Aspekt wird meistens anhand eines Graphen manifestiert. Mit der Forderung nach einer „Entwicklung des funktionalen Denkens“ bezeichnet man heute in der Fachdidaktik den Entwicklungsprozess von Schülerinnen und Schülern, der bei diesen zur Konstitution eines Funktionsbegriffes führt.⁴

Nach diesen grundsätzlichen Überlegungen erheben sich nun die Fragen, wann funktionales Denken und Funktionen in der historischen Entwicklung der Mathematik die Bühne betraten und seit wann sich die große Bedeutung des funktionalen Denkens auch in den Lehrplänen höherer Schulen wiederfindet.

2. Vgl. Bildungsstandards 2012, S. 25.

3. Vollrath 1989, S. 6.

4. Vgl. Vollrath 1989.

2 Die historische Entstehung des Funktionsbegriffes

Ein Denken in funktionalen Zusammenhängen lässt sich bereits auf babylonischen Keilschrifttafeln finden, auf denen z.B. für astronomische Berechnungen Quadrat- und Kubikzahlen aufgelistet sind. Es dauerte jedoch bis ins 14. Jahrhundert, bis Nicolas Oresme (1320-1382) die Idee einbrachte, dass sich jede messbare Größe – wie z. B. Geschwindigkeit – „als stetig veränderliche Größe denken lasse“ und auch eine den heutigen Funktionsgraphen nicht unähnliche Methode fand dieses graphisch darzustellen. Galileo Galilei (1564-1642) und Johannes Kepler (1571-1630) verfolgten dann das Ziel, ihre Beobachtungen von Bewegungsbahnen mathematisch zu beschreiben. Galileis Herleitung des Fallgesetzes wurde und wird oft als klassisches Beispiel für die Entwicklung des funktionalen Denkens herangezogen.⁵

Zwei wichtige Schritte auf dem Weg zu unserem heute gebräuchlichen Funktionsbegriff waren die Einführung der symbolischen Schreibweise in die Algebra durch Francois Viète (1540-1603) und die Verbindung der Geometrie mit dieser neuen Schreibweise zu einer *analytischen Geometrie* durch Pierre de Fermat (1607-1665) und René Descartes (1596-1650). In Descartes' bedeutendstem mathematischen Werk, der 1637 in französischer Sprache erschienen „Géométrie“, wurde zum ersten Mal explizit der funktionale Zusammenhang zwischen zwei Größen durch eine Gleichung angesprochen.

„[...] on peut prendre à discrétion l'une des deux quantités inconnues x ou y , & chercher l'autre par cette équation, [...] Même, prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y , on en trouvera aussi infinies diverses grandeurs pour la ligne x , & ainsi on aura une infinité de divers points [...] par le moyen desquels on décrira la ligne courbe demandée.“⁶

„[...] man kann daher eine der beiden unbekanntenen Größen x oder y beliebig annehmen und die andere durch diese Gleichung zu bestimmen suchen. [...] Indem man der Linie y der Reihe nach unendlich viele verschiedene Größen beilegt, erhält man auch unendlich viele für die Linie x , und auf diese Weise unendlich viele Punkte [...] mit Hilfe deren alsdann die gesuchte krumme Linie beschrieben werden kann.“⁷

5. Vgl. Krüger 2000, S. 38ff.

6. Descartes 1637, S. 313.

7. Übersetzung aus Descartes 1969, S. 17.

Unter anderem durch Isaac Newton (1643-1727) wurde die bei Descartes noch vorhandene Beschränkung auf – in heutiger Bezeichnung – algebraische Funktionen aufgegeben und durch Einsatz der Potenzreihenentwicklung mit den trigonometrischen Funktionen auch transzendente Funktionen beschrieben. Unter dem Namen Fluxionsrechnung entwickelte Newton dann seine Form der Infinitesimalrechnung. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), der zeitgleich mit Newton seinen Infinitesimalkalkül entwickelte, war der Erste, der 1673 in einer seiner Schriften die Bezeichnung „Funktion“ verwendete. Allerdings unterschied sich die Bedeutung noch stark von der heutigen: Leibniz meinte mit „Funktion“ von einem veränderlichen Punkt einer Kurve abhängige Strecken (Tangente, Normale, etc.).⁸ In einem Brief von Johann Bernoulli (1667-1748) an Leibniz findet sich 1694 die folgende, uns eher vertraut klingende Definition:

„Funktion einer variablen Größe nennt man eine auf beliebige Art und Weise aus dieser Variablen Größe und aus Konstanten zusammengesetzte Größe.“⁹

Leonhard Euler (1707-1783), Schüler Johann Bernoullis und mit 866 Fachpublikationen einer der produktivsten Mathematiker aller Zeiten, führte diese Idee weiter. Im Jahr 1748 erschien Eulers bedeutendes Lehrbuch „Introductio in Analysin Infinitorum“ (Einleitung in die Analysis des Unendlichen). Die *Introductio* hatte einen entscheidenden Einfluss auf die Entwicklung der Analysis als eigenständige Teildisziplin der Mathematik. Euler machte darin die Analysis zu einer Lehre der Funktionen. In den Folgejahren erschienen ein zweibändiges Werk zur Differential- und ein dreibändiges zur Integralrechnung.¹⁰ In der *Introductio* definierte Euler 1748 Funktionen folgendermaßen:

„4. *Functio quantitatis variabilis, est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili, & numeris seu quantitativis constantibus.*

Omnis ergo expressio analytica, in qua praeter quantitatem variabilem z omnes quantitates illiam expressionem componentes sunt constantes, erit Functio ipsius z : Sic $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b\sqrt{(aa - zz)}$; c^z &c. sunt Functiones ipsius z .“¹¹

„§4 Eine **F u n c t i o n** einer veränderlichen ZahlgröÙe ist ein **analytischer Ausdruck**, der auf irgend eine Weise aus der veränderlichen ZahlgröÙe

8. Vgl. Krüger 2000, S. 41ff.

9. Zitiert nach Krüger 2000, S. 44.

10. Vgl. Sonar 2011, S. 455f.

11. Euler 1748. S. 4.

se und aus eigentlichen Zahlen oder aus constanten Zahlgrößen zusammengesetzt ist.

Jeder analytische Ausdruck also, welcher ausser der veränderlichen Zahlgröße z nur noch constante Zahlgrößen enthält, ist eine Function von z . So sind z. B. die Ausdrücke $a + 3z$; $az - 4z^2$; $az + b\sqrt{a^2 - 4z^2}$; c^z u.s.w. Functionen von z .¹²

Leonhard Euler klassifizierte in der *Introductio* Funktionen in algebraische und transzendente Funktionen. Erstere teilte er wiederum in rationale und irrationale ein. Auch die Einordnung rationaler Funktionen in *ganze* und *gebrochene* findet sich bereits in der *Introductio*.¹³ Im Prinzip ist die durch ihn vorgenommene Einteilung der unterschiedlichen Arten von Funktionen bis heute im Gebrauch.

In seinen 1755 erschienenen *Institutiones calculi differentialis* präziserte Euler seine Definition einer Funktion sieben Jahre später noch einmal:

„Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant, eae harum functiones appellari solent; quae denominatio latissime patet atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur.“¹⁴

„Sind nun Größen auf die Art voneinander abhängig, daß keine davon eine Veränderung erfahren kann, ohne zugleich eine Veränderung in der anderen zu bewirken, so nennt man diejenige, deren Veränderung man als die Wirkung von der Veränderung der anderen betrachtet, eine Funktion von dieser, eine Benennung, die sich so weit erstreckt, daß sie alle Arten, wie eine Größe durch eine andere bestimmt werden kann, unter sich begreift.“¹⁵

Nachdem die Mathematiker des 18. Jahrhunderts sich bemühten, die Analysis als die Lehre von den Funktionen von der Geometrie zu lösen und mit Formeln an die Algebra zu binden, folgte im 19. Jahrhundert mit der zunehmenden Forderung nach mathematischer Strenge, eine mit dem Schlagwort „Arithmetisierung“ belegte Anlehnung an die natürlichen Zahlen und die Arithmetik. Dabei wurde der Funktionsbegriff von der Bindung an eine eindeutig vorgegebene Formel getrennt.¹⁶ Im ausgehenden 19. Jahrhundert lösten sich Mathematiker wie Karl Weierstraß (1815-1897) oder Richard Dedekind (1831-1916) dann ganz vom Größenbegriff, der seit

12. Übersetzung aus Euler 1983, S. 4.

13. Vgl. Euler 1983, S. 5ff.

14. Euler 1755, S. VI.

15. Übersetzung aus Heuser 2008, S. 154.

16. Vgl. Lützen 1999, S. 192f.

Euler dem Funktionsbegriff zugrunde lag, und setzten in Bezug auf die Analysis grundlegend auf die axiomatisch definierten reellen Zahlen.¹⁷

3 Entstehung von Lehrplänen

Nachdem sich das funktionale Denken und der Funktionsbegriff vor allem im 19. Jahrhundert zu einem Kernbegriff der Mathematik entwickelt hatten, stellt sich die Frage, ab wann sich dieses auch in den Lehrplänen höherer Schulen widerspiegelte. Dazu soll zunächst ein kurzer Überblick über die Entstehung und Entwicklung von Lehrplänen des höheren Schulwesens gegeben werden.

In dem am 18. Januar 1871 ausgerufenen deutschen Kaiserreich – und erst recht in der Zeit davor – galt, ähnlich wie heute, die Kulturhoheit der einzelnen Bundesstaaten. Nichtsdestotrotz wurden, die höhere Bildung betreffende Fragen im ganzen deutschsprachigen Raum miteinander diskutiert. Eine gute Gelegenheit dazu boten die in ein- bzw. zweijährigem Rhythmus an wechselnden Orten stattfindenden Tagungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte oder die Versammlungen der deutschen Philologen und Schulmänner. Die Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte wurde 1822 gegründet und hielt jährlich an wechselnden Orten im deutschsprachigen Raum Versammlungen ab, bei denen in Vorträgen die aktuellen wissenschaftlichen Fortschritte in der Medizin und den Naturwissenschaften (und damit auch der Mathematik) ausgetauscht wurden. Die Zielsetzung bei der Gründung des Vereins deutscher Philologen und Schulmänner im Jahre 1837 war es dieses Erfolgsmodell für die philologischen Wissenschaften zu kopieren. Gleichzeitig sollte auch ein Zeichen für das wachsende Selbstbewusstsein des entstehenden Gymnasiallehrerstandes gesetzt werden und eine Basis geschaffen werden, um sich gegen die in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts neu entstehenden Realschulen zu wappnen.

Obwohl die einzelnen Bundesstaaten in Fragen der Bildung völlig selbstständig entscheiden konnten, orientierten sich doch insbesondere nach 1871 viele am Vorbild Preußens, dem sowohl flächenmäßig als auch auf die Bevölkerung bezogen mit Abstand größten Bundesstaat. Aus diesem Grunde wird in diesem Beitrag nur auf die konkreten Verhältnisse in Preußen eingegangen. Die erste staatliche Regelung des höheren Schulwesens erfolgte in Preußen durch ein „Edict vom 23. December 1788 wegen Prüfung der auf die Universitäten gehenden Schüler auch Collation der Stipendien und anderer Beneficien“. Durch das darin zum ersten Mal verfügte Abiturientenexamen wurden einige höhere Schulen, die dieses Examen abnehmen

17. Vgl. Epple 1999, S. 371f.

durften, vor den übrigen privilegiert. Das Reifezeugnis wurde zwar nicht notwendig, aber hinreichend zur Immatrikulation an einer Universität. Eine weitere Bedeutung kam dem Abiturzeugnis im beginnenden 19. Jahrhundert zu, weil es zu einer notwendigen Grundvoraussetzung zum Eintritt in den höheren Staatsdienst wurde. Mit diesen beiden Funktionen entwickelte sich das Abiturzeugnis des Gymnasiums zu einem Auswahlkriterium zur Rekrutierung der staatstragenden Elite.¹⁸ Erst durch die Abiturprüfungsordnung von 1834 wurde ein Abiturzeugnis zur Immatrikulation an einer preußischen Universität verbindlich vorausgesetzt. Schüler, die von Hauslehrern unterrichtet wurden, konnten die entsprechenden Prüfungen extern ablegen.

Da es vor 1788 keine für die höheren Schulen verbindlichen Ordnungen gab, wurde mit der Erstellung von Lehrplänen und Abiturprüfungsordnungen zu Beginn des 19. Jahrhunderts vor allem versucht die unterschiedlichsten Schulformen zu vereinheitlichen und mehr und mehr unter die Oberaufsicht des Staates zu stellen. Zur Frage eventueller Veränderungen des höheren Schulwesens wurden in Preußen in den Jahren 1873, 1890 und 1900 vom Kultusministerium große Schulkonferenzen – zu denen verschiedenste Fachleute eingeladen wurden – organisiert. Die Ergebnisse dieser Schulkonferenzen hatten für die preußische Regierung jedoch keinen verbindlichen, sondern nur beratenden Charakter.

Der Lehrplan von 1882 war der erste, der alle Arten allgemeinbildender höherer Schulen – humanistische und realistische – in einem Plan zusammenfasste. Mit dem Lehrplan von 1892 war die Klassifizierung und Strukturierung des höheren Schulwesens dann endgültig abgeschlossen. Es existierten nunmehr nur noch drei Arten neunjähriger höherer Schulen: Gymnasien (mit Latein und Griechisch), Realgymnasien (mit Latein und modernen Fremdsprachen, vorher: Realschulen 1. Ordnung) und Oberrealschulen (ohne klassische Sprachen, dafür eine vermehrte Stundenzahl in Naturwissenschaften und Mathematik). Zu den neunjährigen Vollanstalten existierten noch jeweils sechsjährige Nichtvollanstalten (Progymnasien, Realprogymnasien, Realschulen). Für die Fächer Religion, Deutsch, Geschichte, Erdkunde und Turnen gab es im Lehrplan von 1892 keine inhaltliche Unterscheidung zwischen den verschiedenen Arten höherer Schulen.¹⁹

18. Vgl. Bölling 2010, S. 17

19. Vgl. Mattheis 2000a, S. 12f

4 Der Funktionsbegriff im Lehrplan höherer Schulen

Im Folgenden verengen wir die Begrifflichkeiten vom funktionalen Denken zum Funktionsbegriff als solchen und untersuchen, wann und wie dieser explizit in den Lehrplänen höherer Schulen auftauchte. Eine der grundlegenden Fragen bei der Entwicklung der drei Arten höherer Schulen im ausgehenden 19. Jahrhundert war die Frage, welche Inhalte und welche Schulform allgemeine Persönlichkeitsbildung und welche lediglich Fachbildung (im Sinne einer Ausbildung) liefern konnten. In Punkt 4 der Vorbemerkungen des Lehrplans von 1882 wurde diesbezüglich für die Oberrealschulen folgendes festgehalten:

„Die lateinlosen Realschulen von neunjähriger Lehrdauer (Ober-Realschulen) haben sich im Wesentlichen selbständig entwickelt, ohne das im Voraus ein Normalplan für die Stundenzahl und für die in den einzelnen Gegenständen zu erreichenden Lehrziele vorgezeichnet war. In Folge hiervon sind sie nicht frei von der Gefahr geblieben, durch eine überwiegende Hingebung an die mathematisch-naturwissenschaftliche Seite des Unterrichts den Charakter von Fachschulen anzunehmen. Dieser Gefahr vorzubeugen liegt im dringenden Interesse dieser Schulen; denn nur insoweit dieselben den thatsächlichen Beweis liefern, daß auch unter Beschränkung auf moderne Sprachen der Aufgabe der sprachlich formalen und der ethischen Bildung vollständig Genüge geschieht, sind dieselben fähig, als Schulen allgemeiner Bildung neben den Gymnasien und Realschulen 1. Ordnung zu gelten.“²⁰

Über jeglicher Überlegung nach einer inhaltlichen Erneuerung der mathematischen Inhalte in Hinblick auf den Funktionsbegriff und funktionales Denken schwebte also das Damoklesschwert einer Abwertung zu einer reinen Fachschule. Den Funktionsbegriff sucht man in den – kurz dargestellten – mathematischen Inhalten für die Gymnasien des Lehrplans von 1882 vergeblich. Die Behandlung der Differentialrechnung wurde für Gymnasien sogar explizit untersagt.

„Die wirkliche Aneignung des mathematischen Wissens und Könnens in dem Umfange, welcher als Lehraufgabe des Gymnasiums bezeichnet ist, reicht nach den ausdrücklichen Erklärungen kompetenter Fachmänner des technischen Gebietes auch zum Eintritte in die technischen Hochschulen aus. Dieser Umfang ist nicht zur verringern, er ist aber auch nicht durch Hineinziehen der sphärischen Trigonometrie oder der

20. Lehrplan 1882, S. 237.

analytischen Geometrie oder gar der Differentialrechnung in den Schulunterricht zu erweitern.“²¹

Im Lehrplanteil für die Realgymnasien und Oberrealschulen wurde die Differentialrechnung immerhin als an diesen Schulen statthaft – wenn auch nicht verpflichtend – aufgelistet.

„An den Ober-Realschulen können die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes und der Differentialberechnung hinzugefügt werden. [...] Der Umfang des mathematischen Unterrichtes ist nach Stundenzahl und Lehraufgabe im Wesentlichen ungeändert gelassen; nur sind die Elemente der Integralrechnung ganz beseitigt und diejenigen der Differentialrechnung und der analytischen Geometrie des Raumes nur an den Ober-Realschulen als statthaft (aber nicht als unbedingt erforderlich) gelassen worden.“²²

Dies ist die einzige Stelle des Lehrplans von 1882, an der in irgendeiner Form ein Zusammenhang zu Funktionen oder funktionalem Denken hergestellt wurde. In der Folgezeit manifestierte sich u. a. deshalb die Frage einer zukünftigen Aufnahme des Funktionsbegriffs und des funktionalen Denkens in die Lehrpläne der höheren Schulen in der Frage einer Einführung der Differential- und Integralrechnung in den höheren Schulen.²³ Da die höheren Schulen ihren allgemeinbildenden Charakter scharf gegen jegliche Fachbildung abgrenzten, war die Frage einer Aufnahme des Funktionsbegriffs in die Lehrpläne in den folgenden Jahren eng verbunden mit der Frage, ob die Differential- und Integralrechnung allgemeinbildend sei oder lediglich Fachwissen darstelle.

In der Neufassung des Lehrplans von 1892 wurden die allgemeinen Lehrziele in Mathematik an Gymnasien um den „Koordinatenbegriff und einige Grundlehren von den Kegelschnitten“²⁴ erweitert, blieben ansonsten aber größtenteils gleich. In den methodischen Bemerkungen wurde dazu die Möglichkeit aufgeführt, dass „die Schüler der obersten Klasse in den besonders wichtigen Koordinatenbegriff“²⁵ eingeführt werden durften. Für die beiden Realanstalten umfasste der Lehrstoff für die Oberprima noch die „Elementare Theorie der Maxima und Minima“²⁶, eine Vereinfachung der grundlegenden Ideen der Differentialrechnung. Der Lehrer war zum Unterrichten dieser Inhalte allerdings nicht verpflichtet.

21. Lehrplan 1882, S. 256.

22. Lehrplan 1882, S. 262 & S. 266.

23. Vgl. Allmendinger 2014, S. 11.

24. Lehrplan 1892, S. 245.

25. Lehrplan 1892, S. 248.

26. Lehrplan 1892, S. 251.

Nach der preußischen Schulkonferenz von 1900 beendete Wilhelm II.²⁷ in seiner Eigenschaft als preußischer König die grundsätzliche Streitfrage der Bedeutung der drei Arten höherer Schulen in Preußen. Er verfügte als preußisches Staatsoberhaupt, „dass das Gymnasium, das Realgymnasium und die Oberrealschule in der Erziehung zur allgemeinen Geistesbildung als gleichwertig anzusehen sind“. In dem Erlass Wilhelms II. vom 26. November 1900 wurde ebenfalls die folgende Hoffnung für die Zukunft der unterschiedlichen Arten höherer Schulen formuliert: „Durch die grundsätzliche Anerkennung der Gleichwertigkeit der drei höheren Lehranstalten wird die Möglichkeit geboten, die Eigenart einer jeden kräftiger zu betonen.“ Insbesondere die Anhänger einer Bildung im Sinne der beiden Realanstalten, die Mathematik und Naturwissenschaften verstärken und modernisieren wollten, erhofften sich nun eine grundlegende Erneuerung der Inhalte.²⁸ Von Seiten der Mathematik bezog sich diese Modernisierung vor allem in der Forderung einer Aufnahme des Funktionsbegriffs als ein zentrales Element des Mathematikunterrichts höherer Schulen. Ein Schwerpunkt sollte hierbei vor allem die graphische Darstellung von Funktionen sein.

Mit dem Lehrplan vom 29. Mai 1901 wurden die Hoffnungen auf eine Modernisierung der mathematischen Inhalte allerdings nicht erfüllt. Bei der Auflistung der zu lehrenden Inhalte in Rechnen und Mathematik findet sich bei den Lehraufgaben des Gymnasiums für die Prima zwar „der Koordinatenbegriff“²⁹, den Funktionsbegriff sucht man allerdings weiterhin vergeblich. Bei den Lehrzielen von Realgymnasium und Oberrealschule erscheint in der Prima – wie bereits 1892 – „Elementare Aufgaben über Maxima und Minima“, dafür wurde dort der Koordinatenbegriff nicht explizit erwähnt.³⁰ In den sich im Lehrplan von 1901 an die Auflistung der Lehraufgaben anschließenden „Methodischen Bemerkungen für Rechnen und Mathematik“ erscheint dann im zehnten von zwölf Punkten zum ersten und einzigen Mal in einem preußischen Lehrplan vor dem ersten Weltkrieg der Begriff einer Funktion.

„10. In der obersten Klasse wird auf den verschiedenen Lehrgebieten neben der fortgesetzten Übung im Lösen von Aufgaben eine zusammenfassende Rückschau auf den erledigten Lehrstoff anzustreben sein.

27. Der Monarch war sehr an Fragen des höheren Schulwesens interessiert und – wohl aufgrund eigener Erfahrungen aus seiner Gymnasialzeit in Kassel – ein entschiedener Gegner der humanistischen Gymnasien. Wilhelm II. nahm persönlich an der zweiten preußischen Schulkonferenz des Jahres 1890 teil. Auch an der dritten Schulkonferenz des Jahres 1900 wollte er teilnehmen, hatte seine Teilnahme dann aber aufgrund der erwarteten scharfen Kontroverse über die Gleichwertigkeit der Abschlüsse von Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen wieder abgesagt. Vgl. Mattheis 2000a, S. 16ff.

28. Vgl. Mattheis 2000a, S. 17f.

29. Lehrplan 1901, S. 52.

30. Lehrplan 1901, S. 54 & S. 56.

Dabei wird sich Gelegenheit bieten, den Schülern ein eingehendes Verständnis des Funktionsbegriffs, mit dem sie schon auf früheren Stufen bekannt geworden sind, zu erschließen.“³¹

Dieser Punkt 10 der methodischen Bemerkungen steht völlig unabhängig von dem kompletten übrigen Lehrplan. Wo und an welcher Stelle der Funktionsbegriff den Schülern „auf früheren Stufen“ begegnet sein könnte, erschließt sich weder aus den aufgeführten konkreten Inhalten noch aus den methodischen Bemerkungen. Wie diese Diskrepanz zu lösen ist, muss hier leider offenbleiben.

5 Reformbewegung und Meraner Lehrplanvorschlag

Eine der maßgeblichen Persönlichkeiten, die sich nachdrücklich dafür einsetzte, das funktionale Denken in den Mathematikunterricht höherer Schulen einzubringen, war der Göttinger Professor für Mathematik Felix Klein (1849-1925). Nach Stationen an den Universitäten Erlangen (1872) und Leipzig (1880) sowie der Technischen Hochschule in München (1875) folgte 1886 seine Berufung an die Universität in Göttingen. Klein setzte sich an allen seinen Wirkungsstätten für eine Modernisierung des universitären Mathematikunterrichts durch die Einrichtung von mathematischen Übungen und Seminaren, in denen die Studierenden zu selbstständigem Arbeiten gebracht werden sollten, sowie für die Anlage von Modellsammlungen und mathematischen Seminarbibliotheken ein.³² Nach seinem Ruf nach Göttingen war er – in Zusammenarbeit mit dem preußischen Kultusministerium – seit der zweiten Hälfte der 1890er Jahre dafür mitverantwortlich, das Göttinger mathematische Institut zu einem der weltweit bedeutendsten Zentren für Mathematik aufzubauen. Was die Mathematik angeht, so behielt Göttingen diese Bedeutung bis zur Vertreibung der jüdischen Wissenschaftler durch die Nationalsozialisten im Jahr 1933.

Wahrscheinlich durch die bestehenden Kontakte zum Kultusministerium wurde Klein auch als einziger Universitätsmathematiker zur preußischen Schulkonferenz von 1900 eingeladen, die mittelbar den Gleichwertigkeitserlass Wilhelms II. zur Folge hatte. Sowohl in vorher eingereichten Gutachten als auch in seinen Redebeiträgen bei der Schulkonferenz forderte Felix Klein die grundlegenden Bereiche von analytischer Geometrie, Differential- und Integralrechnung sowie darstellender Geometrie bereits an höheren Schulen einzuführen. Dies wäre aus seiner Sicht nicht

31. Lehrplan 1901, S. 59.

32. Vgl. Mattheis 2000b, S. 43f.

nur sinnvoll als Grundlage für ein mathematisch-naturwissenschaftlich-technisches Studium an einer Technischen Hochschule, sondern er sah darin auch eine bessere Vorbereitung für ein Universitätsstudium der Naturwissenschaften oder der Medizin.³³ Nach der Schulkonferenz hoffte Klein zunächst, dass seine Ideen und die Forderung nach einer stärkeren Berücksichtigung des Funktionsbegriffs im Mathematikunterricht höherer Schulen in der Neufassung des Lehrplans berücksichtigt würden. Dementsprechend war er über den 1901 erschienenen Lehrplan enttäuscht.³⁴

Die vor allem unter Mathematikern geführte Diskussion hatte dann zur Folge, dass 1904 bei der 76. Versammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Breslau eine zwölfköpfige Unterrichtskommission gegründet wurde, die sich mit einer aus Sicht der Versammlung notwendigen Reform des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts befassen sollte. Felix Klein wurde als Vertreter der Deutschen Mathematiker Vereinigung in die Breslauer Unterrichtskommission entsandt und wurde der Vorsitzende der mathematisch-physikalischen Subkommission. Schon ein Jahr später, bei deren nächster Jahresversammlung, legte die Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte einen nach dem Tagungsort Meran benannten Lehrplanvorschlag vor. In seinem Bericht an die Versammlung erläuterte der Vorsitzende der Unterrichtskommission August Gutzmer zunächst die allgemeine Zielsetzung.

„Unter voller Anerkennung des formalen Bildungswertes der Mathematik muß auf einseitige und praktisch wertlose Spezialkenntnisse verzichtet, dagegen die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung und Auffassung der Vorgänge in der Natur und in den menschlichen Lebensverhältnissen geweckt und gekräftigt werden. Demgemäß stellt die Kommission die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens als wichtigste Aufgaben des Mathematikunterrichts hin. Dabei bleibt die Pflege der logischen Schulung nicht nur unbeeinträchtigt, sondern sie wird bei der gekennzeichneten Richtung des mathematischen Unterrichts noch gewinnen.“³⁵

Inhaltlich sollte nach den im Meraner Lehrplanvorschlag formulierten Vorstellungen der Unterrichtskommission der Mathematikunterricht in der Prima der Gymnasien „bis an die Schwelle der Infinitesimalrechnung herangeführt werden“.³⁶ Da

33. Vgl. Mattheis 2000b, S. 55.

34. Vgl. Schubring 2007, S. 5f.

35. Gutzmer 1905, S. 146.

36. Meraner Lehrplanvorschlag 1905, S. 155f.

zu dieser Zeit auch innerhalb der mathematischen Gemeinschaft die Frage danach, ob die Differential- und Integralrechnung allgemeinbildender Inhalt oder doch nur Fachbildung sei, nicht einheitlich beantwortet wurde, ließ die Unterrichtskommission hierbei offen, wie weit der einzelne Lehrer dabei gehen sollte.

Bei den konkreten mathematischen Inhalten der einzelnen Jahrgangskurse tauchte der Funktionsbegriff dann zum ersten Mal in der Untertertia (entspricht im neunjährigen Gymnasium der heutigen Klasse 8) auf. „Fortsetzung der Übungen in Auswertung von Buchstabenausdrücken unter Heranziehung der negativen Größen und steter Betonung des funktionalen Charakters der auftretenden Größenveränderungen.“³⁷ Von da an ziehen sich funktionale Zusammenhänge und der Funktionsbegriff durch die weiteren Jahrgangsstufen des Meraner Lehrplanvorschlags sowohl in der Arithmetik als auch in der Raumlehre. In den Erläuterungen wird im Meraner Lehrplanvorschlag erneut betont, dass mit *Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens* mehr gemeint sei als nur eine Beschäftigung mit Funktionen.

„Auf diese Weise bleibt Zeit, den Hauptteil der Arbeit auf die Erziehung zum funktionalen Denken zu verwenden, das bereits durch die propädeutische Behandlung der Arithmetik am Schluß des Quartaununterrichtes insofern vorbereitet ist, als dort die Änderung der algebraischen Ausdrücke, durch Einsetzen verschiedener Werte für die einzelnen in ihnen auftretenden Größen, ganz von selbst sich geltend macht.

2b. Diese Gewohnheit des funktionalen Denkens soll auch in der Geometrie durch fortwährende Betrachtung der Änderungen gepflegt werden, die die ganze Sachlage durch Größen- und Lagenänderung im einzelnen erleidet, z. B. bei Gestaltsänderung der Vierecke, Änderung in der gegenseitigen Lage zweier Kreise u.s.w.“³⁸

Schubring kritisierte zu Recht, dass – insbesondere aus dem Blickwinkel der Didaktik – der Fokus in Bezug auf die Unterrichtsreformen zu sehr auf den 1905 veröffentlichten Meraner Lehrplanvorschlägen liegt und deren Vor-, Entstehungs- und Wirkungsgeschichte viel zu wenig Beachtung geschenkt wird.³⁹ Oft wird dabei auch übersehen, dass die Meraner Lehrplanvorschläge nur Vorschläge waren, aus denen für die Lehrer zunächst keinerlei juristische Genehmigung zur Verwendung oder gar Verbindlichkeit folgte. Die Meraner Lehrplanvorschläge wurden nicht von einer staatlichen Lehrplankommission eines deutschen Bundesstaates erarbeitet,

37. Meraner Lehrplanvorschlag 1905, S. 159.

38. Meraner Lehrplanvorschlag 1905, S. 163.

39. Vgl. Schubring 2007, S. 1.

sondern von einer Kommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. In Preußen, dem mit Abstand größten und damit in vielen Bildungsfragen richtungsweisenden Bundesstaat des Deutschen Reiches, wurden die Meraner Lehrplanvorschläge erst durch die Lehrpläne von 1925 und in leicht geänderter Form verbindlich. Vorher hatten sie nur den Status von Anregungen, die mit ministerieller Zustimmung an einzelnen Schulen erprobt werden durften.

Felix Klein warb auch nach der Veröffentlichung des Meraner Lehrplanvorschlags weiter für die darin enthaltenen Ideen und machte diese in Lehrveranstaltungen und Veröffentlichungen einem breiteren Publikum bekannt. Die grundlegende Bedeutung des Funktionsbegriffs für den schulischen Mathematikunterricht findet sich z. B. auch im ersten Band seiner *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte*⁴⁰ aus, einer Ausarbeitung der gleichnamigen Vorlesung des Wintersemesters 1907/08.

„Wir wollen nur, daß der allgemeine Funktionsbegriff in der einen oder anderen Eulerschen Auffassung den ganzen mathematischen Unterricht der höheren Schulen wie ein Ferment durchdringe; er soll gewiß nicht durch abstrakte Definitionen eingeführt, sondern an elementaren Beispielen, wie man sie schon bei Euler in großer Zahl findet, dem Schüler als lebendiges Besitztum überliefert werden.“⁴¹

Die Debatte um eine Erneuerung des mathematischen Lehrplans höherer Schulen wurde in den folgenden Jahren dann nicht nur in der mathematischen Gemeinschaft und zum Teil auch sehr emotional weitergeführt. Schlagwortartig ging es dabei dann vor allem um die Frage der Aufnahme von Differential- und Integralrechnung sowie von analytischer Geometrie in den Stoffkanon. Weil das Ministerium den gerade erneuerten Lehrplan von 1901 nicht nach ein paar Jahren schon wieder ändern wollte, dauerte es jedoch bis nach dem ersten Weltkrieg bis 1925 ein neuer Lehrplan erstellt wurde. Ganz in der Intention des Meraner Lehrplanvorschlages betonte der Lehrplan vom 4. April 1925 in den methodischen Bemerkungen zur Mathematik als allgemeines Lehrziel explizit die Förderung der Raumanschauung⁴² und implizit auch die Entwicklung des funktionalen Denkens.

„... Erzielung der Fähigkeit, das Mathematische in Form, Maß, Zahl und Gesetzmäßigkeit an den Gegenständen und Erscheinungen der

40. Eine detaillierte Untersuchung von Felix Kleins *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* lieferte Allmendinger 2014.

41. Klein 1908, S. 448.

42. Die Förderung der Anschauung war Felix Kleins zweites großes Ziel bei seinen Anstrengungen zur Reform des Mathematikunterrichts höherer Schulen. Vgl. dazu Mattheis 2019.

Umwelt zu erkennen und die gewonnene Erkenntnis selbständig anzuwenden; insbesondere Entwicklung des räumlichen Anschauungsvermögens und der Fertigkeit im mathematischen Auffassen der gegenseitigen Abhängigkeit veränderlicher Größenwerte. . . .⁴³

Bei den Lehraufgaben wurde in den methodischen Bemerkungen dann im Punkt „III. Arithmetik, Algebra und Analysis“ die Bedeutung des Funktionsbegriffs explizit hervorgehoben. Neben grundlegenden Eigenschaften von Funktionen findet man dabei ebenfalls den Aspekt der *Funktion als Ganzes*.

„2. Der in den Mittelpunkt des Unterrichts zu stellende Funktionsbegriff wird zunächst anschaulich eingeführt, um allmählich schärfer gefaßt und auf der Oberstufe in allgemeiner Form behandelt zu werden. Schon in UIII [Untertertia] beginnt die Einführung in die Grundlagen der graphischen Darstellung an praktischen Beispielen. Daran schließen sich in rein anschauungsmäßiger Behandlung die wichtigsten Eigenschaften empirischer Funktionen: Stetigkeit, Steigung, Flächeninhalt. Um eine klare Trennung der Begriffe ‚Unbekannte und Gleichung‘ von den Begriffen ‚Veränderliche und Funktion‘ zu erzielen, darf aber die graphische Darstellung im rechtwinkligen Koordinatensystem erst nach den Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten behandelt werden. Auf allen Stufen, besonders aber in den Mittelklassen, ist darauf hinzuweisen, daß bei der Verwertung graphischer Darstellungen die bildliche Wiedergabe nicht Selbstzweck ist, sondern nur ein Mittel zum Übersehen eines Funktionsverlaufes. Daneben ist ebenso das andere Mittel, die Tabelle, in ihrer Bedeutung voll zu würdigen.“⁴⁴

Auch der Streitpunkt um die Frage der Aufnahme der Infinitesimalrechnung in den Stoffkanon höherer Schulen wurde mit dem Lehrplan von 1925 eindeutig entschieden. Im selben Punkt „III. Arithmetik, Algebra und Analysis“ der methodischen Bemerkungen wurde zum entsprechenden Kalkül festgehalten: „Durch die Einführung infinitesimaler Methoden erhalten die Schüler Kenntnis von dem wichtigsten Werkzeug der Mathematik. [. . .]“⁴⁵ Dies umfasste sowohl die Differentialrechnung als auch die Bestimmung von einfachen Flächen- und Rauminhalten mit Hilfe der Integralrechnung. In den folgenden Teilen des Lehrplans wurden für die verschiedenen Arten höherer Schulen dann noch konkretere Angaben zu den zu lehrenden mathematischen Inhalten – auch in Bezug auf den Funktionsbegriff – aufgeführt.

43. Lehrplan 1925, S. 32.

44. Lehrplan 1925, S. 33.

45. Lehrplan 1925, S. 33.

Nachdem der Funktionsbegriff und das funktionale Denken 1925 erstmals in die Lehrpläne höherer Schulen aufgenommen wurden, blieben sie auch in der nachfolgenden Lehrplanentwicklung Kernelemente des schulischen Mathematikunterrichts. Die durch einen Ministererlass vom 20. März 1937⁴⁶ und den neuen Lehrplan von 1938⁴⁷ erfolgte grundlegende Umgestaltung des kompletten höheren Schulwesens in Deutschland im Sinne der nationalsozialistischen Machthaber hatte eine Vereinheitlichung fast aller höherer Schulen unter dem neuen Namen „Oberschule“⁴⁸ zur Folge, änderte aber nichts an der grundlegenden Bedeutung des Funktionsbegriffs für den Mathematikunterricht höherer Schulen.⁴⁹

Eine exemplarische Untersuchung von Lehrplänen des Bundeslandes Rheinland-Pfalz der Jahre 1954 und 1984 belegt, dass der Funktionsbegriff und das funktionale Denken auch nach 1945 in diesem Bundesland einen wesentlichen Kern des schulischen Mathematikunterrichts darstellte.⁵⁰ Es darf wohl davon ausgegangen werden, dass dies auch für die übrigen Bundesländer entsprechend extrapoliert werden kann, zumal in den bundesweit geltenden Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz der Jahre 2003 und 2012 jeweils eine der grundlegenden Leitideen mit „Funktionaler Zusammenhang“ überschrieben wurde.⁵¹

6 Fazit

Als Fazit kann man festhalten, dass nicht nur der Funktionsbegriff in seiner Entwicklung von den ersten Anfängen bei Descartes über Euler bis zu modernen Definitionen im 19. Jahrhundert einen weiten Weg zu gehen hatte. Auch die Entwicklung und Strukturierung des höheren Schulwesens vollzog sich – beginnend mit der ersten preußischen Abiturprüfungsordnung vom 23. Dezember 1788 – in einer langwierigen und nicht immer gradlinigen Entwicklung. Im 19. Jahrhundert lag dabei der Schwerpunkt zunächst in einer Bestandsaufnahme und Vereinheitlichung der überhaupt existierenden und aus Lateinschulen und Bürgerschulen entstandenen

46. Amtsblatt 1937.

47. Lehrplan 1938.

48. Die bisherige Schulzeit der höheren Schulen wurde 1938 von 9 Jahren auf 8 Jahre verkürzt. Die Oberschule teilte sich in der Oberstufe in einen sprachlichen und einen naturwissenschaftlich-mathematischen Zweig. Neben der Oberschule als hauptsächliche höhere Schulform (Sprachenfolge: Englisch, Latein zuzüglich einer weiteren lebenden Fremdsprache im sprachlichen Zweig) blieben noch einige wenige Gymnasien als Sonderform bestehen (Sprachenfolge: Latein, Griechisch, Englisch).

49. Lehrplan 1938, S. 187-203ff.

50. Lehrplan 1954, S. 126-136 („Der Funktionsbegriff und der Abbildungsgedanke sollen den ganzen Mathematikunterricht durchdringen.“ S. 127), Lehrplan 1984 („Leitgedanken . . . , das Erfassen von funktionalen Zusammenhängen, . . .“ S. 6).

51. Bildungsstandards 2003, S. 15f. und Bildungsstandards 2012, S. 25.

höheren Schulen. Gegen Ende des Jahrhunderts rückte dann vor allem die Frage in den Vordergrund, inwieweit die Realanstalten den humanistischen Gymnasien gegenüber als gleichwertig anerkannt werden sollten. Nachdem diese Gleichwertigkeit in Bezug auf die Studienberechtigungen durch den Erlass vom 26. November 1900 festgeschrieben worden war, konnten Mathematiker und Naturwissenschaftler daran gehen den schulischen Unterricht ihrer Fächer aktuelleren Erkenntnissen ihrer Wissenschaften anzupassen. Für die Mathematik bedeutete dies vor allem die Aufnahme des Funktionsbegriffs in die Lehrpläne. Eine entscheidende Rolle in den Reformbestrebungen spielte der Göttinger Mathematiker Felix Klein, der mit Friedrich Althoff über enge Kontakte ins preußische Kultusministerium verfügte. Der Erste Weltkrieg, die Urkatastrophe des 20. Jahrhunderts, verzögerte auch hier die weitere Entwicklung. Damit wurde der preußische Lehrplan höherer Schulen vom 4. April 1925 der erste Lehrplan, der den Funktionsbegriff und das funktionale Denken als eine grundlegende Idee ins Zentrum des schulischen Mathematikunterrichts setzte. Diese Bedeutung haben Funktionsbegriff und funktionales Denken im schulischen Mathematikunterricht bis heute.

Literatur

Allmendinger, Henrike: Felix Kleins *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht, *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik*, Band 3 (2014).

Amtsblatt 1937: Übergangsbestimmungen zur Vereinheitlichung des höheren Schulwesens, Erlass vom 20. März 1937. In: *Deutsche Wissenschaft, Erziehung und Volksbildung. Amtsblatt des Reichs- und Preußischen Ministerium für Wissenschaft, Erziehung und Volksbildung und der Unterrichts-Verwaltungen der anderen Länder* 3 (1937) Heft 7, S. 155-156.

Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 04.12.2003).

Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012).

Bölling, Rainer: *Kleine Geschichte des Abiturs*, Paderborn (Schöningh) 2010.

Descartes, René: *Discours de la Méthode. Pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences. Plus La Dioptrique Les Météores et La Géometrie*. Leyde (Jan Maire) 1637.

Descartes, René: Geometrie. Deutsch herausgegeben von Ludwig Schlesinger. Darmstadt (Wissenschaftliche Buchgesellschaft) 1969.

Epple, Moritz: Das Ende der Größenlehre: Grundlagen der Analysis 1860-1910. In: Jahnke, Hans Niels (Hrsg.): *Geschichte der Analysis*, Heidelberg (Spektrum) 1999, S. 371-410.

Euler, Leonhard: *Introductio in Analysin Infinitorum*. Lausanne (M.-M. Bousquet) 1748.

Euler, Leonhard: *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum*, Volume 1, St. Petersburg (Kaiserliche Akademie der Wissenschaften) 1755.

Euler, Leonhard: Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Ins Deutsche übertragen von H. Maser, Berlin (Springer) 1885. Reprint 1983.

Heuser, Harro: Eulers Analysis. In: Biegel, Gerd/Klein, Angela/Sonar, Thomas (Hrsg.): *Leonhard Euler – Mathematiker, Mechaniker, Physiker*. Braunschweig (Braunschweigesches Landesmuseum) 2008, S. 147-163.

Gutzmer August: Bericht der Unterrichtskommission über ihre bisherige Tätigkeit. Allgemeiner Bericht; in: *VGDNA* 1905 (77. Versammlung zu Meran) Erster Teil S. 142-153

Klein, Felix: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Teil 1: Arithmetik, Algebra, Analysis. Vorlesung gehalten im Wintersemester 1907-08 von F. Klein. Ausgearbeitet von E. Hellinger. 1. Auflage Leipzig (Teubner) 1908.

Krüger, Katja: *Erziehung zum funktionalen Denken. Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips*. Berlin (Logos-Verlag) 2000.

Lehrplan 1882: *Cirkular-Verfügung, betreffend die Einführung der revidirten Lehrpläne für die höheren Schulen vom 31. März 1882*. In: *Centralblatt* 1882 S. 234-276.

Lehrplan 1892: *Lehrpläne und Lehraufgaben vom 6. Januar 1892*. In: *Centralblatt* 1892, S. 201-277.

Lehrplan 1901: *Lehrpläne und Lehraufgaben für die höheren Schulen in Preußen [vom 29. Mai 1901]*. Halle (Waisenhaus) 1901.

Lehrplan 1925: *Richtlinien für die Lehrpläne der höheren Schulen Preußens vom 4. April 1925*. In: *Centralblatt* 1925, S. 1-96.

- Lehrplan 1938: Erziehung und Unterricht in der höheren Schule. Amtliche Ausgabe des Reichs - und Preußischen Ministeriums für Wissenschaft, Erziehung und Volksbildung. Berlin (Weidmann) 1938
- Lehrplan 1954: Lehrpläne für die höheren Schulen in Rheinland-Pfalz. Herausgegeben vom Ministerium für Unterricht und Kultus des Landes Rheinland-Pfalz, Grünstadt (Sommer) 1954.
- Lehrplan 1984: Kultusministerium Rheinland-Pfalz: Lehrplan Mathematik (Klassen 7-9/10) Hauptschule Realschule Gymnasium, Grünstadt (Sommer) 1984.
- Lützen, Jesper: Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert. In: Jahnke, Hans Niels (Hrsg.): *Geschichte der Analysis*, Heidelberg (Spektrum) 1999, S. 191-244.
- Mattheis, Martin 2000a: Die Entwicklung des höheren Schulwesens in Preußen von 1871 bis 1900. In: *MU* 46 (2000) Heft 3, S. 5-21.
- Mattheis, Martin 2000b: Felix Kleins Gedanken zur Reform des mathematischen Unterrichtswesens vor 1900. In: *MU* 46 (2000) Heft 3, S. 41-61.
- Mattheis, Martin: Aspects of “Anschauung” in the Work of Felix Klein. In: Weigand et al. (eds.), *The Legacy of Felix Klein*, ICME-13 Monographs, Cham (Springer) 2019, S. 93-106.
- Meraner Lehrplanvorschlag 1905: Bericht der Unterrichtskommission über ihre bisherige Tätigkeit, Beilagen: I. Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten. In: *VGDNÄ* 1905 (77. Versammlung zu Meran) Erster Teil S. 154-165.
- Schubring, Gert: Der Aufbruch zum „funktionalen Denken“: Geschichte des Mathematikunterrichts im Kaiserreich. 100 Jahre Meraner Reform. In: *NTM Neue Serie* 15 (2007) Heft 1, S. 1-17.
- Sonar, Thomas: 3000 Jahre Analysis. Berlin (Springer) 2011.
- Vollrath, Hans-Joachim: Funktionales Denken. In: *JMD* 10 (1989) Heft 1, S. 3-37.