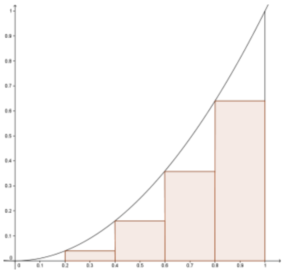
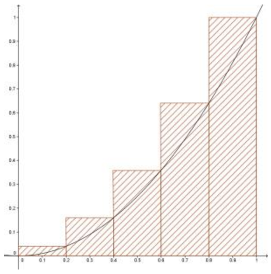
Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse

❶ Es soll der Flächeninhalt $A_{[0;1]}$ zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ und der x-Achse über dem Intervall [0;1] bestimmt werden.



Dazu wird das Intervall [0;1] in n gleich große Teilstücke der Länge ___ aufgeteilt und von diesen jeweils die Unter- und Obersumme berechnet.

Zur Erinnerung: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$



Untersumme U_n		**Obersumme** O_n	
$U_n = \frac{1}{n}\cdot f(0) + \frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{1}{n}\right) + \qquad + \cdots +$		$O_n = \frac{1}{n}\cdot f(\quad) + \frac{1}{n}\cdot f(\quad) + \cdots + \frac{1}{n}\cdot \qquad + \frac{1}{n}\cdot$	
$= \frac{1}{n}\cdot\left(f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \qquad\right)$		$= \frac{1}{n}\cdot\left(\qquad\right)$	
$= \frac{1}{n}\cdot\left(0 + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \qquad\right)$		$= \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \qquad\right)$	
$= \frac{1}{n}\cdot \quad \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2)$		$= \frac{1}{n}\cdot \quad \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2)$	
$= \frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{\qquad}{6}\right)$	$= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{\qquad}\right)$	$= \frac{1}{n^3}\cdot\left(\frac{\qquad}{\qquad}\right)$	$= \frac{1}{\quad}\cdot\left(\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{\qquad}\right)$
$= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{(n-1)\cdot(2n-1)}{n^2}\right)$	$= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2n^2 \qquad}{n^2}\right)$	$= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{(n+1)\cdot(2n+1)}{n^2}\right)$	$= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{\qquad +1}{n^2}\right)$

Für den Flächeninhalt $A_{[0;1]}$ gilt: U_n ___ $A_{[0;1]}$ ___ O_n

Je ________ n, desto ________ nähern sich U_n und O_n dem tatsächlichen Flächeninhalt $A_{[0;1]}$ an.

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2n^2-3n+1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\qquad}{\qquad}\right) = \frac{1}{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\quad}{n^2} - \frac{\quad}{n^2} + \frac{\quad}{n^2}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\quad}{n^2}\right) - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\quad}{n^2}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\quad}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{6}\cdot(\quad - \quad + \quad) =$$

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty}\left(\qquad\qquad\right) = \quad\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\qquad\qquad\right) = \frac{1}{6}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\qquad\qquad\right)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\left(\qquad\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\qquad\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\qquad\right)\right) = \frac{1}{6}\cdot(\qquad\qquad) =$$

Für den Flächeninhalt $A_{[0;1]}$ gilt also:

$$= \lim_{n\to\infty} U_n \le A_{[0;1]} \le \qquad = \qquad \Longrightarrow \quad A_{[0;1]} =$$

❷ Wie groß ist der Flächeninhalt $A_{[0;b]}$ zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ und der x-Achse im Intervall [0;b]?

Für den Flächeninhalt $A_{[0;b]}$ über [0;b] unter dem Graphen von $f(x)=x^2$ gilt:

$A_{[0;b]}$ =

❸ Wie groß ist der Flächeninhalt $A_{[a;b]}$ zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ und der x-Achse in [a;b]?

Für den Flächeninhalt $A_{[a;b]}$ über [a;b] unter dem Graphen von $f(x)=x^2$ gilt:

$A_{[a;b]}$ =