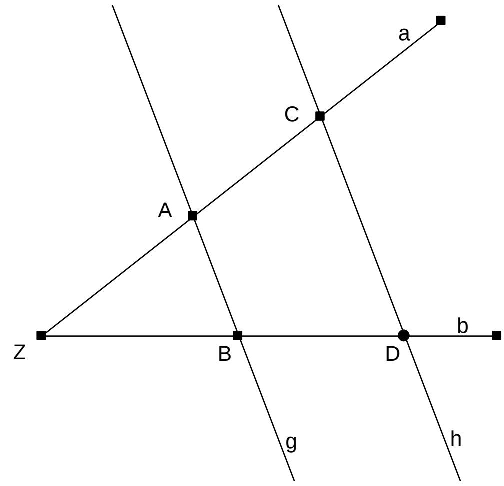
Die Strahlensätze und ihre Umkehrungen

Voraussetzung:
Zwei sich schneidende Strahlen a und b werden von zwei parallelen Geraden g und h geschnitten.



Der 1. Strahlensatz
Wenn zwei durch eine Punkt Z gehende Strahlen von ______________________ geschnitten werden, dann verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl

____

|ZA|:|ZC| = __________

Beweis des 1. Strahlensatzes:
Da AB || CD gibt es eine zentrische Streckung $S_{Z,m}$, die AB auf ______ abbildet.

m·____ =____ $\Rightarrow$ m = $\frac{|ZC|}{|ZA|}$ und m·|ZB| = ____ $\Rightarrow$ m = $\frac{|ZD|}{|ZB|}$

$\Rightarrow \frac{|ZC|}{|ZA|} = m = \frac{|ZD|}{|ZB|} \Rightarrow \frac{|ZA|}{|ZC|} = \frac{|ZB|}{|ZD|}$ $\Rightarrow$ |ZA|:|ZC| = ________

q.e.d.

Der 2. Strahlensatz
Wenn zwei durch eine Punkt Z gehende Strahlen von __________________ geschnitten werden, dann verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die entsprechenden Abschnitte auf jedem Strahl: |AB|:|CD| = ____________ und |AB|:|CD| = ____________

Beweis des 2. Strahlensatzes:
Da AB || CD gibt es eine zentrische Streckung $S_{Z,m}$, die AB auf CD abbildet.

m·|ZA| = |ZC| $\Rightarrow$ m = ____ und m·|AB| = |CD| $\Rightarrow$ m = ____

$\Rightarrow \frac{|ZC|}{|ZA|} = m = \frac{|CD|}{|AB|}$ $\Rightarrow \frac{|ZA|}{|ZC|} = \frac{|AB|}{|CD|}$ $\Rightarrow$ |ZA|:|ZC| = ____________ q.e.d.

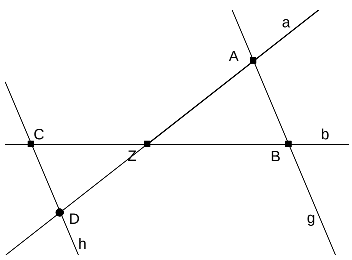
Die Umkehrung des 1. Strahlensatzes

Behauptung: Wenn |ZA| : |ZC| = |ZB| : |ZD| erfüllt ist, dann gilt ____________
Beweis: Nach der Voraussetzung gilt: |ZA| : |ZC| = |ZB| : |ZD|
$\Rightarrow$ es gibt $S_{Z,m}$ welche die Gerade AB auf ____________________ abbildet.
Nach den Eigenschaften der zentrischen Streckung gilt dann: ____ || ____ q.e.d.
Also: Der 1. Strahlensatz ist umkehrbar!

Die Umkehrung des 2. Strahlensatzes

Behauptung: Wenn |ZA| : |ZC| = |AB| : |CD| erfüllt ist, dann gilt immer AB || CD
Beweis:

Bemerkung:
Die beiden Strahlensätze gelten auch, wenn die Parallelen auf unterschiedlichen Seiten des Schnittpunktes Z der beiden Strahlen liegen.



Erstellt von Martin Mattheis, Frauenlob-Gymnasium Mainz
Stand: 14. März 2010