Wissenswertes über Mengen

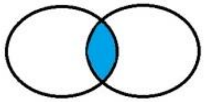
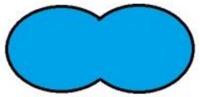
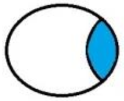
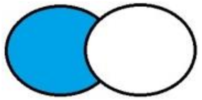
Der Mathematiker und Begründer der Mengenlehre Georg Cantor (1845-1918) aus Halle erklärte im Jahr 1895 den Begriff einer **Menge** folgendermaßen:

„Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung *M* von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten *m* unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von *M* genannt werden) zu einem Ganzen."

[Georg Cantor: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre.
In: Mathematische Annalen 46 (1895), S. 481-512;
Foto von: http://owpdb.mfo.de/detail?photo_id=10525 am 27. August 2013]

Mit dieser Definition können neben Zahlen auch alle anderen mathematischen Objekte sowie auch Dinge außerhalb der Mathematik als Elemente von Mengen aufgefasst werden. In seinem Artikel von 1895 führte Cantor auch die Begriffe Vereinigungsmenge, Teilmenge und Mächtigkeit einer Menge ein.

Heute verdeutlicht man die Beziehungen zwischen Mengen gerne anschaulich in Mengendiagrammen (Venn-Diagrammen).

Schnittmenge $A \cap B$ 	**Vereinigungsmenge** $A \cup B$ 
Teilmenge $C \subset A$ 	**Differenzmenge** $A \setminus B$ 

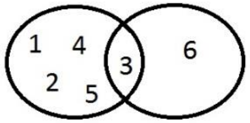
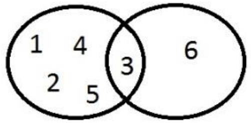
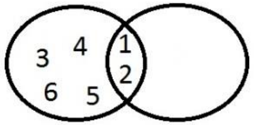
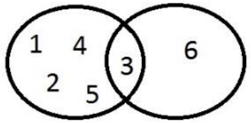
Wenn man – vor allem bei unendlichen Mengen – nicht alle Elemente einer Menge aufzählen kann, beschreibt man die Menge durch die Eigenschaft ihrer Elemente.

So kann zum Beispiel die Menge *M* aller Quadratzahlen folgendermaßen beschrieben werden: $M = \{ y \mid y = x^2 \text{ für } x \in \mathbb{N} \}$
(Lies: „Die Menge aller y für die gilt: y ist gleich x zum Quadrat für eine beliebige natürliche Zahl x.")

Unter der Mächtigkeit einer Menge versteht man seit Cantor die Anzahl ihrer Elemente, so ist zum Beispiel $|\{6; 28; 496; 8128\}| = 4$.

Beispiel:

A = {1; 2; 3; 4; 5}   B = {3; 6}   C = {1; 2}

Schnittmenge $A \cap B = \{3\}$ 	**Vereinigungsmenge** $A \cup B =$ {1; 2; 3; 4; 5; 6} 
Teilmenge $C \subset A$ und $B \not\subset A$ 	**Differenzmenge** $A \setminus B =$ {1; 2; 4; 5} 

Intervallschreibweise reeller Zahlenmengen

Teilmengen von $\mathbb{R}$ kann man auch in der Intervallschreibweise ausdrücken:

Geschlossenes Intervall $[a;b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$

Offenes Intervall $]a;b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Halboffene Intervalle $[a;b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$, $]a;b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$

Wenn es um Zahlenmengen mit $\pm\infty$ geht, ist diese Intervallseite immer offen:

$]-\infty;b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid$ ___________ $\}$, $]-\infty;b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid$ ___________ $\}$,

$[a;+\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid$ ___________ $\}$, $]a;+\infty[= \{ x \in \mathbb{R} \mid$ ___________ $\}$

Aufgaben:

❶ Bilde alle möglichen Schnittmengen, Vereinigungsmengen, Teilmengen und Differenzmengen der folgenden Mengen:
U = {1; 2; 3; 5; 8}, V = {1; 2; 3}; W = {2; 4; 6; 8}; X = { }

❷ Setze ein, so dass eine wahre Aussage entsteht: $\in \mid \notin \mid \subset \mid \not\subset \mid \subseteq \mid \not\subseteq \mid \cap \mid \cup \mid \setminus$
a) 42 ___ $\mathbb{N}$ b) {42} ___ $\mathbb{N}$ c) $\mathbb{Q}^+$ ___ $\mathbb{Z}^+$ ___ $\mathbb{N}$ d) $\mathbb{Q}$ ___ $\mathbb{R} = \{ \} = \emptyset$

❸ Beschreibe alle möglichen Schnittmengen-, Vereinigungsmengen- und Teilmengen-Beziehungen der folgenden Mengen: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, [55;118]

❹ Richtig oder falsch? Begründe Deine Antwort.
a) $\{f; l; g\} \subset \{e; f; g; k; l; m\}$ b) $\pi \in \mathbb{Q}$ c) $M \subset M$ d) $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{N}|$

❺ Es sei: $\{2; 4; 6\} \subset M \subset \{0; 2; 4; 6; 8\}$. Welche Möglichkeiten gibt es für M?

❻ Gib mindestens drei Teilmengen der Menge M an.
M = { Mathematik; Physik; Chemie; Informatik }

❼ Bestimme alle möglichen Teilmengen der Menge M = {83; 89; 97}