Gruppe als mathematische Struktur

Quelle 1: „Es sind hauptsächlich zwei große allgemeine Begriffe, von denen die moderne Algebra beherrscht wird. Die Existenz und Bedeutung dieser Begriffe konnte allerdings erst erkannt werden, nachdem die Algebra bis zu einem gewissen Grad fertig und zum Eigentum der Mathematik geworden war. Erst dann konnte in ihnen das verbindende und führende Prinzip erkannt werden.
Es sind die Begriffe der Gruppe und des Körpers, zu deren Erklärung wir jetzt fortschreiten. Der allgemeinere Begriff ist der der Gruppe, mit dem wir also beginnen."
[Weber, Heinrich: Lehrbuch der Algebra. Kleine Ausgabe in einem Bande, Braunschweig 1912, S. 180]

Aufbauend auf Vorarbeiten des Franzosen Evariste Galois, entwickelte der Engländer Arthur Cayley im Jahr 1854 den allgemeinen Begriff einer Gruppe:

Quelle 2: „A set of symbols 1, α, β, … all of them different, and such that the product of any two of them (no matter in what order), or the product of any one of them into itself, belongs to the set, is said to be a group."
[Cayley, Arthur: The Collected Mathematical Papers, Cambridge 1889-1898, Volume 2, S. 124]

❶ Welche Bedingung knüpfte Cayley an eine Menge (engl. „set"), damit sie Gruppe genannt werden darf?

Eine heutige Definition des Gruppenbegriffs sieht folgendermaßen aus:

Eine nichtleere Menge M von Objekten mit einer Verknüpfung ⊕ für welche die Bedingungen G1 bis G4 gelten, nennt man in der Mathematik eine **Gruppe**:

G1 Die Verknüpfung ist ____ (siehe ❶).

G2 Bei der Verknüpfung gilt das *Assoziativgesetz*.

G3 Es gibt ein *Neutrales Element*, das man mit jedem anderen Verknüpfen kann, ohne dass sich das andere ändert.

G4 Es gibt zu jedem Element ein *Gegenelement* (beide miteinander verknüpft ergeben das Neutrale Element).

G5 Wenn bei der Verknüpfung zusätzlich das *Kommutativgesetz* gilt, dann nennt man (M, ⊕) eine kommutative Gruppe.

❷ Überprüfe, ob die Menge aller Vektoren mit der Vektoraddition ⊕ eine Gruppe bildet.

G1	G2	G3	G4	G5
	stimmt			

❸ Bei welchen der folgenden Mengen mit der angegebenen Verknüpfung handelt es sich um Gruppen? Gib an welche Gruppenbedingung (G1 bis G5) erfüllt bzw. verletzt wird.
$(\mathbb{N},+)$; $(\mathbb{N}_0,+)$; $(\mathbb{Z},+)$; $(\mathbb{Q},+)$; $(\mathbb{R},+)$; $(\mathbb{N},\cdot)$; $(\mathbb{N}_0,\cdot)$; $(\mathbb{Z},\cdot)$; $(\mathbb{Q},\cdot)$; $(\mathbb{R},\cdot)$

Quelle 3: „Es sind nun aber, …, im Folgenden nicht eigentlich die hiermit aufgezählten Figuren selbst, die den Gegenstand unserer Betrachtung ausmachen, vielmehr sind es jene *Drehungen*, oder auch *Spiegelungen*, oder kurz gesagt: diejenigen elementargeometrischen Operationen, durch welche die genannten Figuren mit sich selbst zur Deckung kommen. … Man sagt von beliebigen Operationen, daß sie eine Gruppe bilden, wenn je zwei der Operationen zusammengesetzt immer wieder eine Operation unter den bereits gegebenen erzeugen. In diesem Sinne haben wir sofort den Satz: *Die Drehungen, welche einen regulären Körper mit sich selbst zur Deckung bringen, bilden in ihrer Gesammtheit eine Gruppe*."
[Klein, Felix: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade, Leipzig 1884, S. 4f.]

❹ Gibt es weitere Gruppen in der Geometrie? Wenn ja, welche?

Gruppen können unendlich viele oder auch nur endlich viele Elemente haben. Im Folgenden die Verknüpfungstafeln zweier endlicher Gruppen mit je 4 Elementen:

Kleinsche Vierergruppe {1,a,b,c}				
	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

Zyklische Gruppe C_4 $\{1,c,c^2,c^3\}$				
	1	c	c^2	c^3
1	1	c	c^2	c^3
c	c	c^2	c^3	1
c^2	c^2	c^3	1	c
c^3	c^3	1	c	c^2

❺ Wie sind die Verknüpfungstafeln zu lesen? Was fällt Dir auf?

❻ Erstelle die Verknüpfungstafel der Zyklischen Gruppe C_5 (mit 5 Elementen).

❼ Gibt es weitere Gruppen mit vier Elementen?

❽ Findest Du weitere Mengen in der Mathematik, die Gruppen sind?

Quelle 4: „Eine Gruppe wird zum Körper, wenn in ihr zwei Arten der Composition möglich sind, von denen die erste Addition, die zweite Multiplikation genannt wird."
[Weber, Heinrich: Die allgemeinen Grundlagen der Galoisschen Gleichungstheorie; in: Mathematische Annalen 43 (1893), S. 521-549, hier S. 526]

❾ Welche Probleme können sich mit Webers Definition beim Körper $\mathbb{R}$ ergeben?

❿ Welche Körper im mathematischen Sinne kennst Du?