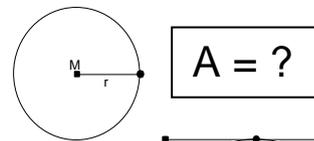


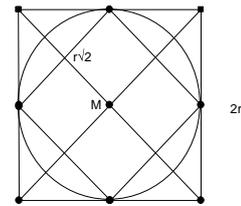
Der Flächeninhalt eines Kreises



① Erste Näherung durch ein Quadrat:

Außenquadrat: Seitenlänge $2r \Rightarrow A_{\text{Außenquadrat}} = 4r^2$

Innenquadrat: Seitenlänge $r \cdot \sqrt{2} \Rightarrow A_{\text{Innenquadrat}} = 2r^2$
(mit Pythagoras: $x^2 + x^2 = (2r)^2$)



② Bessere Näherung durch ein Außen-8-Eck

$A_{\text{Außenachteck}} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot r\right) = 8 \cdot x \cdot r$

Pythagoras: $y^2 = b^2 + r^2$

Pythagoras: $y^2 = x^2 + r^2 \Rightarrow x^2 = b^2 \Rightarrow x = b = r - a$
 $\Rightarrow a = r - x$

Pythagoras: $(2r)^2 + (2r)^2 = d^2 \Rightarrow d^2 = 8r^2 \Rightarrow d = \sqrt{8} \cdot r$

Diagonale des Außenquadrats: $z = \frac{1}{2} \cdot d - r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot r - r$

Pythagoras: $x^2 + z^2 = a^2$

$\Rightarrow x^2 + \left[\frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot r - r\right]^2 = (r - x)^2$

$\Rightarrow x^2 + \left[\frac{1}{4} \cdot 8 \cdot r^2 - 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot r\right) \cdot r + r^2\right] = (r^2 - 2 \cdot r \cdot x + x^2)$

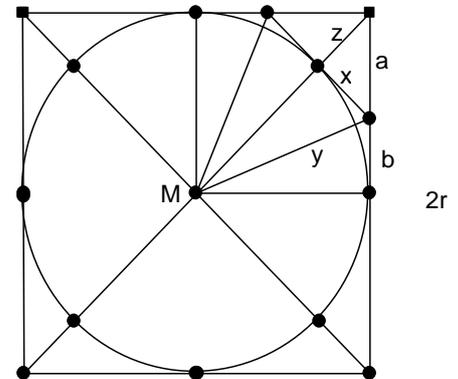
$\Rightarrow x^2 + 2 \cdot r^2 - \sqrt{8} \cdot r^2 + r^2 = r^2 - 2 \cdot r \cdot x + x^2 \quad | -x^2 \quad | -r^2$

$\Rightarrow 2 \cdot r^2 - \sqrt{8} \cdot r^2 = -2 \cdot r \cdot x$

$\Rightarrow 2 \cdot r \cdot x = -2 \cdot r^2 + \sqrt{8} \cdot r^2$

$\Rightarrow x = -r + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot r$

$A_{\text{Außenachteck}} = 8 \cdot x \cdot r = 8 \cdot \left(-r + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8} \cdot r\right) \cdot r = -8r^2 + 4 \cdot \sqrt{8} \cdot r^2 = (4 \cdot \sqrt{8} - 8) \cdot r^2 \approx 3,31 \cdot r^2$



③ Bessere Näherung durch ein Innen-8-Eck

Wir untersuchen zunächst eines der 8 gleichschenkligen Dreiecke:

Der Mittelpunktswinkel des Dreiecks AMB beträgt $360^\circ : 8 = 45^\circ$

\overline{BC} steht senkrecht auf \overline{MA}

\Rightarrow der Winkel $MBC = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

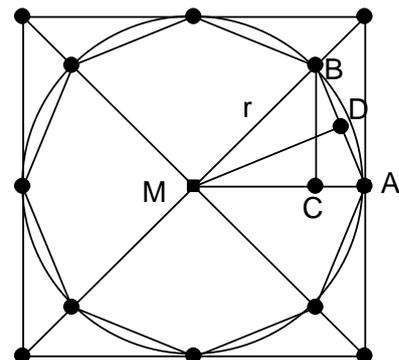
\Rightarrow das Dreieck MBC ist gleichschenkelig, also $\overline{MC} = \overline{BC}$

Mit Pythagoras: $\overline{MC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{MB}^2$

$\Rightarrow 2 \cdot \overline{BC}^2 = r^2 \Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{\frac{1}{2} r^2} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot r$

$A_{\text{Dreieck AMB}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MA} \cdot \overline{BC} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot r = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot r^2$

$A_{\text{Innenachteck}} = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot r^2 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot r^2 \approx 2,83 \cdot r^2$



	Innen		Außen	
Quadrat	$2 \cdot r^2$	$< A <$	$4 \cdot r^2$	4-Eck
Achteck	$\approx 2,83 \cdot r^2$	$< A <$	$\approx 3,31 \cdot r^2$	8-Eck
16-Eck	$\approx 3,06 \cdot r^2$	$< A <$	$\approx 3,18 \cdot r^2$	16-Eck
32-Eck	$\approx 3,12 \cdot r^2$	$< A <$	$\approx 3,15 \cdot r^2$	32-Eck
64-Eck	$\approx 3,13 \cdot r^2$	$< A <$	$\approx 3,14 \cdot r^2$	64-Eck
	...			
	$A = \pi \cdot r^2$			$\pi \notin \mathbb{Q}$

Der Flächeninhalt eines Kreises

Für den Flächeninhalt A eines Kreises mit Radius r gilt: $A = \pi \cdot r^2 \quad (\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$