Die eulersche Zahl als Grenzwert der Folge (a_n) mit $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Hilfssatz 1: Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Hilfssatz 2: :
$(1+x)^n > 1+nx$ für n ∈ $\mathbb{N}_0$ mit n > 1 und x ∈ ℝ mit x ≥ –1 (Bernoulli-Ungleichung)

1.1 (a_n) ist monoton steigend

Zur Erinnerung: (a_n) ist streng monoton steigend ⇔ $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ für alle n ∈ ℕ

⓪ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

① $= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ Erweitern mit $\left(1+\frac{1}{n}\right)$

② $= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{}$ ____________________

③ $= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}$ ____________ (in Zähler und Nenner)

④ $= \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ____________________

⑤ $= \left(\quad\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$ Potenzgesetze

⑥ $= \left(\frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)\cdot(n+1)}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ____________________

⑦ $= \left(\frac{\qquad}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$ Quadratische Ergänzung

⑧ $= \left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ____________________

⑨ $= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ____________________

⑩ $> \left(1+(\quad)\cdot(\qquad)\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$ Bernoulli-Ungleichung

$= \left(1-\frac{1}{(n+1)}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) =$ ____________________ $=$ ______ $= 1$

⇒ (a_n) ist ____________________

1.2 (a_n) ist beschränkt

Betrachte zunächst die Folge (b_n) mit $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Zeige analog zu 1.1: (b_n) ist streng monoton fallend, d.h. $\frac{b_n}{b_{n+1}}$ ________

1.3 (a_n) ist konvergent

Weil $\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1$ folgt, dass $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n <$ ____________ $= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n$
also: a_n____b_n für alle n ∈ ℕ.

Da (b_n) streng monoton fallend und (a_n) streng monoton steigend, muss für alle n ∈ ℕ

gelten: $a_n < b_1 =$ ____________ $=$ ⇒ (a_n) ist ____________________.

Nach Hilfssatz1 ist die Folge (a_n) mit $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ damit ________________. q.e.d

> Der Grenzwert der Folge (a_n) heißt „eulersche Zahl" und wird mit e abgekürzt:
> $$e \coloneqq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

2. Die eulersche Zahl bei Leonhard Euler (1707-1783)

„Von der Darstellung der Exponentialgrössen und der Logarithmen durch Reihen.

§ 122. […] $a = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$

Verwandelt man diese Brüche in Decimalbrüche und addirt sie sodann, so erhält man für a folgenden Wert: a = 2,71828182845904523536028, wo auch noch die letzte Ziffer genau ist. Die auf Grund dieser Basis berechneten Logarithmen werden gewöhnlich natürliche […] Logarithmen genannt […]. Wir werden nun in der Folge der Kürze wegen für diese Zahl 2,718281828459… stets den Buchstaben *e* gebrauchen, so dass also *e* die Basis der natürlichen […] Logarithmen bedeutet, […], oder es soll *e* stets die Summe der unendlichen Reihe $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$ bezeichnen."

[Leonhard Euler: Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Erster Teil. Ins Deutsche übertragen von H. Maser, Berlin (Springer) 1885, S. 91 (Original Introductio in Analysin Infinitorum, Lausanne (Bousquet) 1748)]

3. Die eulersche Zahl ist irrational (Indirekter Beweis durch Widerspruch)

⓿ Abkürzende Schreibweise: n! := 1·2·3·…·n (Lies: „n Fakultät")

❶ Nach Euler: $e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$ ⇒❷___< e < 3

❸ Annahme: e sei __________, also $e = \frac{p}{q}$ mit $\frac{p}{q}$ in Grundform (d.h. voll gekürzt) p,q∈ℕ

Weil ___< e < 3 ist, gilt e ___ℚ, also ❹ q > 1.

❺ Multiplikation von e mit q! ergibt: $e\cdot q! = \boxed{q!+\frac{q!}{1!}+\frac{q!}{2!}+\frac{q!}{3!}+\cdots+\frac{q!}{q!}}+\frac{q!}{(q+1)!}+\frac{q!}{(q+2)!}+\cdots$

❻ $e\cdot q! = \frac{p}{q}\cdot q! =$ ____________________ ∈ ℕ, weil jeder Faktor der Multiplikation ∈ℕ ist.

❼ $\boxed{q!+\frac{q!}{1!}+\frac{q!}{2!}+\frac{q!}{3!}+\cdots+\frac{q!}{q!}} = q!+\frac{\qquad}{1}+\frac{\qquad}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{\qquad}{q\cdot(q-1)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$
$= q!+(q\cdot(q-1)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3\cdot 2)+(q\cdot(q-1)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3)+\cdots+q+1$ ___ℕ

❽ $\frac{q!}{(q+1)!}+\frac{q!}{(q+2)!}+\cdots = \frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)\cdot(q+2)}+\frac{1}{(q+1)\cdot(q+2)\cdot(q+3)}+\cdots$ ___ℕ,
weil $\frac{1}{(q+1)}+\frac{1}{(q+1)\cdot(q+2)}+\frac{1}{(q+1)\cdot(q+2)\cdot(q+3)}+\cdots \le \frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{60}+\cdots < 1$

❾ ⚡ Dies führt zum Widerspruch zu ________________, also ist e irrational. q.e.d

[Siehe dazu auch: https://www.youtube.com/watch?v=duFVzBr59gA]