Die Ableitung von Exponentialfunktionen

Sei $f(x) = a^x$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) eine beliebige Exponentialfunktion.

Frage 1: **Gesucht: $f'(x_0)$**

❶ Bestimme $f'(x_0)$ mit der h-Methode

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\qquad}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\qquad - a^{x_0}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^{x_0}\cdot a^h - a^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\_\_\_\_\_ \cdot \frac{a^h - 1}{h}\right)$$

$$= a^{x_0} \cdot \lim_{h\to 0} \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_ \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

also: $f'(x_0)$ existiert, wenn ________________ existiert!

Besonders einfach zu untersuchen ist dies für $x_0 = 0$.

❷ Warum macht eine genauere Untersuchung von $x_0 = 0$ noch Sinn?

Frage 2: **Gesucht ist eine Basis a von $f(x) = a^x$, so dass $f'(0) = 1$**

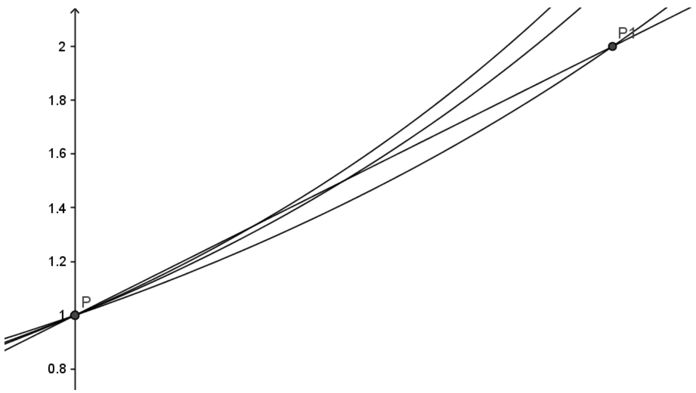
❸ Was bedeutet $f'(0) = 1$ geometrisch?

(1) Allgemeine Geradengleichung einer Tangenten g an f: g(x) =_______

(2) g hat die Steigung m = _____, weil $f'(0) = 1$

(3) g hat den y-Achsenabschnitt b = _____, weil $g(0) = 1$

(4) also: $g(x) = 1\cdot$______, ist die Gleichung der ______________________



Versuch einer Annäherung an $f(x) = a^x$, so dass $f'(0) = 1$ durch $x \to 0$:

1. Annäherung an f mit einem Graphen durch P und $P_1(1|y)$ auf g:
   $P_1(1|g(1)) = P_1(1|\_\_\_\_)$ $\Rightarrow$ $f(1) = a^1 = 2$ $\Rightarrow$ a = ____ $\Rightarrow f_1(x) = \_\_\_\_^x$
2. Annäherung an f mit einem Graphen durch P und $P_2\left(\frac{1}{2}|y\right)$ auf g:
   $P_2\left(\frac{1}{2}\middle|g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = P_2\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{3}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \qquad = - \Rightarrow a = \frac{9}{-} \qquad \Rightarrow f_2(x) = \left(\frac{9}{-}\right)^x$
3. Annäherung an f mit einem Graphen durch P und $P_3\left(\frac{1}{3}|y\right)$ auf g:
   $P_3\left(\quad\middle|\qquad\right) = P_3\left(\frac{1}{3}\middle|\frac{4}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = a^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \left(-\right)^3 = \frac{\quad}{27} \Rightarrow f_3(x) = \left(\frac{\quad}{27}\right)^x$

…

n. Annäherung an f mit einem Graphen durch P und $P_n\left(\frac{1}{n}|y\right)$ auf g:

$P_n\left(\frac{1}{n}\middle|g\left(\frac{1}{n}\right)\right) = P_n\left(\frac{1}{n}\middle|\frac{n+1}{\quad}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}} = \frac{\quad}{n} = 1 +$

$\Rightarrow a = \left(1 + -\right)^n \Rightarrow f_n(x) = \left(\left(\qquad\right)\right)^x$

Für $x = \frac{1}{n} \to 0$ (also n →) kommt man immer näher an P(0|1)

⇒ die gesuchte Basis a der Funktion $f(x) = a^x$ für die gilt $f'(0) = 1$

ist also $a = \lim_{n\to\infty}\left(\quad + -\right)^n =$

Frage 3: Was wissen wir damit über die Ableitung von $f(x) = e^x$?

Von ❶ wissen wir: $f'(x_0) = f(x_0) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$

Für $x_0 = 0$ gilt damit:

$1 = f'(0) = f(0) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} \quad \Rightarrow \quad \_\_\_\_\_ = \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$

⇒ allgemein für beliebiges x_0: $f'(x_0) =$ _______ $\cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f(x_0) \cdot 1$

____. Die natürliche Exponentialfunktion

Die natürliche Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ (mit e = _____________) hat die Ableitungsfunktion $f'(x) =$ ____. Eine Stammfunktion von f ist $F(x) =$ ____.

Mathematikerwitz:

Treffen sich zwei Funktionen in einer Dunklen Gasse. Sagt die eine: „Geh mir aus dem Weg oder ich differenziere dich, bis Du eine Null bist!“ Sagt die andere: „Ätsch, ich bin ___!“