Varianz und Standardabweichung einer Binomialverteilung

. Varianz und Standardabweichung einer Binomialverteilung

Für Varianz und Standardabweichung einer Binomialverteilung mit der Zufallsgröße X: Anzahl der Erfolge gelten: **V(X) = n·p·q** und $\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}$

Beweis:

1)	V(X) = $\sum_{i=1}^{n}(a_i - E(X))^2 \cdot P(X = a_i)$	Definition der Varianz
2)	V(X) = $\sum_{i=1}^{n}(\boxed{}) \cdot P(X = a_i)$	2. binomische Formel
3)	V(X) = $\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 - 2a_i np + (np)^2) \cdot P(X = a_i)$	E(X) $\boxed{}$ (bei Binomialverteilungen)
4)	V(X) = $\sum_{i=1}^{n}\boxed{} \cdot \boxed{} - \boxed{} \cdot P(X = a_i) + (np)^2 \cdot \boxed{}$	Klammer ausmultiplizieren
5)	V(X) = $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot P(X = a_i) - \sum_{i=1}^{n} 2a_i np \cdot P(X = a_i) + \sum_{i=1}^{n}(np)^2 \cdot P(X = a_i)$	Summen aufspalten
6)	V(X) = $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot P(X = a_i) - \boxed{} \sum_{i=1}^{n} \boxed{} + \boxed{} \sum_{i=1}^{n} \boxed{}$	Ausklammern
7)	V(X) = $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot P(X = a_i) - 2np \cdot np + (np)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} P(X = a_i)$	$\boxed{}$
8)	V(X) = $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot P(X = a_i) - 2np \cdot np + (np)^2 \cdot 1$	$\boxed{}$
9)	V(X) = $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot P(X = a_i) - \boxed{} + n^2p^2$	Termumformung
10)	V(X) = $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot P(X = a_i) \boxed{}$	Zusammenfassen
11)	V(X) = $n^2 \cdot p^2 - n \cdot p^2 + np - n^2p^2$	Hilfssatz (siehe unten) mit $a_i = k$
12)	V(X) = $\boxed{}$	Zusammenfassen
13)	V(X) = $\boxed{}$	Ausklammern
14)	V(X) = npq q.e.d.	$\boxed{}$

Hilfssatz

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot P(X = k) = n^2 \cdot p^2 - n \cdot p^2 + n \cdot p$$

Beweis:

1)	$\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot P(X = k)$	
2)	$=\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$\boxed{}$
3)	$=\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{\boxed{}}{\boxed{}} p^k q^{n-k}$	$\binom{n}{k}$ auflösen
4)	$=n \cdot (n-1) \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{(\boxed{})!}{(\boxed{})! \cdot (\boxed{})!} p^k q^{n-k}$	Ausklammern
5)	$=n \cdot (n-1) \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!(1+(\boxed{}-1))}{(n-k)! \cdot (k-1)!} p^k q^{n-k}\right]$	Zahl mal Bruch
6)	$=n \cdot (n-1) \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\boxed{}}{(n-k)! \cdot (k-1)!} p^k q^{n-k}\right]$	Distributivgesetz
7)	$=n \cdot (n-1) \cdot \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!(k-1)}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \cdot p^k q^{n-k} \boxed{} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \cdot p^k q^{n-k}\right]$	Summen aufspalten
8)	$=n \cdot (n-1) \cdot \left[\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot (k-2)!} \cdot p^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \cdot p^k q^{n-k}\right]$	$\boxed{}$
9)	$= n \cdot (n-1) \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} \cdot p^k q^{n-k} + n \cdot (n-1) \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-1)!} \cdot p^k q^{n-k}$	Distributivgesetz [ ]
10)	$= n \cdot (n-1) \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot (k-2)!} \cdot p^k q^{n-k} + n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\boxed{}}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \cdot p^k q^{n-k}$	Distributivgesetz
11)	$= n(n-1)\boxed{} \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-2-(k-2))! \cdot (k-2)!} \cdot p^{k-2} q^{n-k} + n\boxed{} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} \cdot p^{k-1} q^{n-k}$	Ausklammern
12)	$= n \cdot (n-1) \cdot p^2 \cdot \sum_{k=2}^{n} (\boxed{}) \cdot p^{k-2} q^{n-k} + n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{n} (\boxed{}) \cdot p^{k-1} q^{n-k}$	$\binom{n}{k}$ anwenden
13)	$= n \cdot (n-1) \cdot p^2 \left[\binom{n-2}{0} \cdot p^2 q^{n-2} + \binom{n-2}{1} \cdot p^3 q^{n-3} + \cdots + \binom{n-2}{n-2} \cdot p^n q^0\right]$ $+n \cdot p \cdot \left[\binom{n-1}{0} \cdot p^1 q^{n-1} + \binom{n-1}{1} \cdot p^2 q^{n-2} + \cdots + \binom{n-1}{n-1} \cdot p^n q^0\right]$	Summen ausschreiben
14)	$= n \cdot (n-1) \cdot p^2 \cdot (\boxed{})^{n-2} + np \cdot (p+q)^{\boxed{}}$	Binomischer Lehrsatz (Pascalsches Dreieck)
15)	$= n \cdot (n-1) \cdot p^2 \cdot (1)^{n-2} + np \cdot (1)^{n-1}$	$\boxed{}$
16)	$= n \cdot (n-1) \cdot p^2 + np$	$\boxed{}$
17)	$=\boxed{} + np$ q.e.d.	Distributivgesetz