Jahrgang 38 Heft 136 Dezember 2018

MONOID

Mathematikblatt für Mitdenker

Unendlich = unendlich?

Von Martin Mattheis

Habt ihr euch eigentlich auch schon irgendwann einmal gefragt, wie viele natürliche Zahlen es gibt? Nun, wer im Grundschulalter schon einmal versucht hat, diese zu zählen, weiß es vielleicht: 1; 2; 3; 4; 5; … 40; 41; 42; … 2017; 2018; 2019; … und immer so weiter. Man kann zählen, solange man will und kommt doch zu keinem Ende, denn es sind *un*endlich viele. Weil man sie trotzdem theoretisch abzählen könnte, sagt man zur Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen auch, sie sei „abzählbar unendlich“.

Was passiert nun, wenn ich zu der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen noch eine weitere Zahl, zum Beispiel die Null, ergänze? Sind es dann $(\infty + 1)$-viele? Zum leichteren Vergleich schreiben wir die beiden Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ in eine Tabelle:

$\mathbb{N}_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…

Man sieht direkt, dass auch die natürlichen Zahlen mit der Null durch die natürlichen Zahlen abzählbar sind. Trotzdem scheint dies unserem gesunden Menschenverstand – der allerdings in unserem ganzen Leben nur mit endlichen Begebenheiten in Berührung kommt – vollständig zu widersprechen: Die Menge $\mathbb{N}_0$ hat genauso viele Elemente wie die Menge $\mathbb{N}$.

Und was passiert, wenn wir nicht nur eine Zahl, sondern ebenfalls abzählbar unendlich viele Zahlen hinzufügen und damit zu den ganzen Zahlen kommen? Auch diese schreiben wir wieder zusammen mit den natürlichen Zahlen in eine Tabelle:

$\mathbb{Z}$	0	+1	–1	+2	–2	+3	–3	+4	–4	+5	–5	…
$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…

Wir stellen drei Dinge fest: 1) Auch die ganzen Zahlen sind abzählbar unendlich viele; 2) Es gibt genauso viele ganze Zahlen wie natürliche Zahlen und 3) Unser gesunder Menschenverstand fühlt sich noch ein bisschen weniger gesund.

Da man innerhalb der ganzen Zahlen nur eine sehr begrenzte Anzahl von Divisionen durchführen kann, wurden diese zu den rationalen Zahlen erweitert. Die Frage, die sich für uns nun direkt anschließt, ist die, ob es trotz dieser Erweiterung in $\mathbb{Q}$ auch wieder nur abzählbar unendlich viele Zahlen gibt. Nach den Erfahrungen, die wir mit $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{Z}$ gemacht haben, ist diese Frage gleichbedeutend mit der Aufgabe, alle rationalen Zahlen so aufzuschreiben, dass wir sie direkt abzählen können.

Der Hallenser Mathematiker Georg Cantor (1845-1918) entwickelte dazu 1874 das folgende nach ihm benannte „**Cantorsche Diagonalverfahren**“. Zur Vereinfachung betrachten wir zunächst nur die positiven rationalen Zahlen und schreiben diese wie folgt auf:

$\boldsymbol{\frac{1}{1}}$	$\boldsymbol{\frac{2}{1}}$	$\boldsymbol{\frac{3}{1}}$	$\boldsymbol{\frac{4}{1}}$	$\boldsymbol{\frac{5}{1}}$	$\boldsymbol{\frac{6}{1}}$	$\boldsymbol{\frac{7}{1}}$	$\boldsymbol{\frac{8}{1}}$	$\boldsymbol{\frac{9}{1}}$	…
$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{2}$	$\boldsymbol{\frac{3}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{4}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{5}{2}}$	$\frac{6}{2}$	$\boldsymbol{\frac{7}{2}}$	$\frac{8}{2}$	$\boldsymbol{\frac{9}{2}}$	…
$\boldsymbol{\frac{1}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{2}{3}}$	$\frac{3}{3}$	$\boldsymbol{\frac{4}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{5}{3}}$	$\frac{6}{3}$	$\boldsymbol{\frac{7}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{8}{3}}$	$\frac{9}{3}$	…
$\boldsymbol{\frac{1}{4}}$	$\frac{2}{4}$	$\boldsymbol{\frac{3}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{4}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{5}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{6}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{7}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{8}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{9}{4}}$	…
$\boldsymbol{\frac{1}{5}}$	$\boldsymbol{\frac{2}{5}}$	$\boldsymbol{\frac{3}{5}}$	$\boldsymbol{\frac{4}{5}}$	$\frac{5}{5}$	$\boldsymbol{\frac{6}{5}}$	$\boldsymbol{\frac{7}{5}}$	$\boldsymbol{\frac{8}{5}}$	$\boldsymbol{\frac{9}{5}}$	…
$\boldsymbol{\frac{1}{6}}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\boldsymbol{\frac{5}{6}}$	$\frac{6}{6}$	$\boldsymbol{\frac{7}{6}}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{9}{6}$	…
$\boldsymbol{\frac{1}{7}}$	$\boldsymbol{\frac{2}{7}}$	$\boldsymbol{\frac{3}{7}}$	$\boldsymbol{\frac{4}{7}}$	$\boldsymbol{\frac{5}{7}}$	$\boldsymbol{\frac{6}{7}}$	$\frac{7}{7}$	$\boldsymbol{\frac{8}{7}}$	$\boldsymbol{\frac{9}{7}}$	…
$\boldsymbol{\frac{1}{8}}$	$\frac{2}{8}$	$\boldsymbol{\frac{3}{8}}$	$\frac{4}{8}$	$\boldsymbol{\frac{5}{8}}$	$\frac{6}{8}$	$\boldsymbol{\frac{7}{8}}$	$\frac{8}{8}$	$\boldsymbol{\frac{9}{8}}$	…
$\boldsymbol{\frac{1}{9}}$	$\boldsymbol{\frac{2}{9}}$	$\frac{3}{9}$	$\boldsymbol{\frac{4}{9}}$	$\boldsymbol{\frac{5}{9}}$	$\frac{6}{9}$	$\boldsymbol{\frac{7}{9}}$	$\boldsymbol{\frac{8}{9}}$	$\frac{9}{9}$	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Geht man beim Zählen diagonal vor, so erhält man auch hier wieder abzählbar unendlich viele positive rationale Zahlen:

$\mathbb{Q}^+$	$\boldsymbol{\frac{1}{1}}$	$\boldsymbol{\frac{2}{1}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{3}}$	$\frac{2}{2}$	$\boldsymbol{\frac{3}{1}}$	$\boldsymbol{\frac{4}{1}}$	$\boldsymbol{\frac{3}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{2}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{1}{5}}$	…
$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…

Wen es stört, dass hier einige Zahlen mehrfach gezählt werden (z.B. $\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \cdots$), der kann Zahlen, die bereits gezählt wurden, auch gerne überspringen:

$\mathbb{Q}^+$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{1}$	…
$\mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…

Entsprechend der Abzählung der ganzen Zahlen kann man nun auch noch die negativen Brüche ergänzen und erhält damit in $\mathbb{Q}$ auch nur abzählbar unendlich viele Zahlen.

Und wie sieht es bei der nächsten Zahlbereichserweiterung von den rationalen zu den reellen Zahlen aus? Nach den bisher gemachten Erfahrungen mit der abzählbaren Unendlichkeit der Zahlenmengen erscheint es mehr als plausibel, dass auch die rellen Zahlen irgendwie abgezählt werden könnten. Nehmen wir also an, dass es abzählbar unendlich viele reelle Zahlen gibt. Gehen wir im Folgenden also davon aus, dass wir alle positiven reellen Zahlen in einer zählbaren Reihenfolge aufgeschrieben haben. Um unsere Betrachtungen zu vereinfachen, untersuchen wir zunächst nur alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

Wenn es eine Abzählung gibt, dann können wir also auch alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 gemäß dieser Abzählung der Reihe nach aufschreiben:

$\mathbb{N}$	Allgemeine Abzählung	Anfang einer möglichen Abzählung
1	$0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6\ldots$	0,136136…
2	$0{,}b_1b_2b_3b_4b_5b_6\ldots$	0,955099…
3	$0{,}c_1c_2c_3c_4c_5c_6\ldots$	0,424242…
4	$0{,}d_1d_2d_3d_4d_5d_6\ldots$	0,123456…
5	$0{,}e_1e_2e_3e_4e_5e_6\ldots$	0,000110…
6	$0{,}f_1f_2f_3f_4f_5f_6\ldots$	0,130267…
…	…	…

Dabei steht z.B. a_1 für die erste Ziffer der ersten reellen Zahl der Auflistung, b_{42} für die zweiundvierzigste Ziffer der zweiten reellen Zahl der Auflistung usw.

Nun konstruieren wir mit Hilfe obiger Auflistung eine reelle Zahl $r = 0{,}r_1r_2r_3r_4r_5r_6\ldots$ folgendermaßen:

Wenn $a_1 \neq 1$, dann sei $r_1 = 1$, sonst sei $r_1 = 2$,

wenn $b_2 \neq 1$, dann sei $r_2 = 1$, sonst sei $r_2 = 2$,

wenn $c_3 \neq 1$, dann sei $r_3 = 1$, sonst sei $r_3 = 2$, …

In unserer Beispielabzählung würde dies r = 0,211121… ergeben. Nun überlegen wir uns, ob die Zahl r bereits in der Auflistung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 enthalten ist: An der ersten Stelle kann sie nicht stehen, weil $a_1 \neq r_1$, an der zweiten Stelle ebenfalls nicht, da $b_2 \neq r_2$, an der dritten Stelle nicht, weil $c_3 \neq r_3$ usw. usw. Wir haben also eine neue Zahl r konstruiert, die zwar zwischen 0 und 1 liegt, aber in unserer vollständigen Aufzählung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 nicht enthalten ist!

Wie ist dieser offensichtliche Widerspruch zu erklären? Nun ganz einfach dadurch, dass unsere Annahme, dass es zwischen 0 und 1 nur abzählbar unendlich viele reellen Zahlen gäbe, falsch ist. Wenn nun schon die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 mehr als abzählbar unendlich viele sind, dann gilt dies für alle reellen Zahlen ebenfalls. Aus dieser Erkenntnis folgt direkt, dass es verschiedene Stufen der Unendlichkeit gibt. Die Menge der reellen Zahlen ist *nichtabzählbar* oder *überabzählbar*. Was unser oben mehrfach bemühter „gesunder Menschenverstand“ dazu sagt, wird an dieser Stelle offen gelassen.

Benannt ist das im Jahr 1877 veröffentlichte „**Zweite Cantorsche Diagonalverfahren**“ ebenfalls nach seinem Autor Georg Cantor. Das dabei verwendete Beweisverfahren „Beweis durch Widerspruch“, bei dem man zunächst das Gegenteil dessen, was man eigentlich beweisen will, annimmt und diese Annahme durch korrekte Schlussfolgerungen zu einem Widerspruch führt, ist nicht nur in der Mathematik, sondern auch vor Gericht sehr beliebt: „Ich werde beschuldigt um 13 Uhr in Mainz ein Mainzelmännchen angerempelt zu haben. Um 12:45 Uhr habe ich allerdings in Kaiserslautern nachweislich einen Zaun gestrichen (Zeuge: Tom Sawyer). Da es unmöglich ist, in 15 Minuten von Kaiserslautern nach Mainz zu kommen, kann ich das Mainzelmännchen nicht angerempelt haben und bin also unschuldig.“

Literaturtipp zum Weiterlesen:

Wer die Frage der mathematischen Unendlichkeiten weiter vertiefen möchte, dem sei zur Lektüre der Klassiker „Was ist Mathematik?“ von Richard Courant und Herbert Robbins empfohlen, der noch jede Menge andere grundlegende Ideen der Mathematik enthält.